Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Département de Mathématiques
Année universitaire 2017-2018

CORRECTION DS1

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI1 - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

Q.C.M. 1 *[4 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
Aucune justification n'est demandée. **[Réponses DIRECTEMENT écrites sur la copie]**

1. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On pose l'ensemble

$$D = ((A \cap B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}).$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses :
A : D est égal à E. **FAUX**
B : D est inclus dans $A \cap B$. **VRAI**
C : D est inclus dans $A \cup B$. **VRAI**
D : D est inclus dans $A \cup C$. **VRAI**
E : D est inclus dans $A \cap C$. **FAUX**
F : D est inclus dans $(A \cap C) \cup B$. **VRAI**
G : D est inclus dans $(A \cap \overline{C}) \cup B$. **FAUX**
H : D est égal à $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$. **VRAI**

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont égaux au singleton $\{0\}$ et lesquels ne le sont pas :
A : $\{n \in \mathbb{N}; n \leq 1\}$ **FAUX**
B : $\{n \in \mathbb{N}; n < 1\}$ **VRAI**
C : $\{n \in \mathbb{N}; (n \leq 1)$ et $(n$ est un multiple de $2)\}$ **VRAI**
D : $\{n \in \mathbb{N}; 1 + n > 0\}$ **FAUX**
E : $\{n \in \mathbb{N}; 1 + n = 1\}$ **VRAI**
F : $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ **VRAI**
G : $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N} : n < m\}$ **FAUX**
H : $\{n \in \mathbb{N}; \forall m \in \mathbb{N} : m$ est un multiple de $n\}$ **VRAI**

Exercice 1 *[4 points]*
Soient E, F deux ensembles. Considérons $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de F (toutes deux indexées par le même ensemble d'indices I) et B une partie de F.

1. Montrons que $\displaystyle\bigcup_{i\in I}(A_i \times B) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B$.
Soit $(x, y) \in E \times F$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times B) &\iff \exists i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B && \sharp \text{ par définition de l'union}\\
&\iff \exists i \in I,\ x \in A_i \text{ et } y \in B && \sharp \text{ par définition du produit cartésien}\\
&\iff (\exists i \in I, x \in A_i) \text{ et } y \in B && \sharp \text{ car l'indice i n'intervient que sur les } A_i\\
&\iff (x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \text{ et } y \in B && \sharp \text{ par définition de l'union (pour } A_i)\\
&\iff (x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B && \sharp \text{ par définition du produit cartésien}
\end{aligned}$$

2. Montrons que $\bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$.
   Soit $(x,y) \in E \times F$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i) & \Longleftrightarrow & \forall i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B_i \\ & \Longleftrightarrow & \forall i \in I,\ x \in A_i \text{ et } y \in B_i \\ & \Longleftrightarrow & (\forall i \in I, x \in A_i) \text{ et } (\forall i \in I, y \in B_i) \\ & \Longleftrightarrow & (x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \text{ et } (y \in \bigcup_{i\in I} B_i) \\ & \Longleftrightarrow & (x,y) \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \end{array}$$

Exercice 2 *[3 points]*
Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N} :\ (1+a)^n \geq 1 + na.$

Utilisons un raisonnement direct : Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
Comme 1 et a sont commutatifs (ie $1 * a = a * 1$, en utilisant le binôme de Newton, il vient

$$\begin{array}{rcll} (1+a)^n & = & \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p 1^{n-p} & \sharp \text{ par définition du binôme} \\ & = & \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p & \sharp \text{ car } 1^{n-p} = 1 \\ & = & 1 + na + \sum_{p=2}^{n} C_n^p a^p & \sharp \text{ car } 1 + na = C_n^0 a^0 + C_n^1 a^1 \\ & \geq & 1 + na & \sharp \text{ car } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ donc } \sum_{p=2}^{n} C_n^p a^p \geq 0 \end{array}$$

Remarque : Un raisonnement par récurrence (simple) était également possible.

Exercice 3 *[5 points]*
Trois étudiants (Arthur, Baptiste et Charles) sont suspectés d'avoir mangé les goûters de leurs camarades.
Nous possédons seulement les informations suivantes :
— I_1 : Si Charles est innocent, alors Baptiste est coupable.
— I_2 : Soit Arthur est coupable, soit Charles l'est.
— I_3 : Si Baptiste est coupable, alors Arthur aussi.
— I_4 : Si Arthur est responsable, alors Baptiste ne l'est pas.

Posons les propositions A : "Arthur est coupable", B : "Baptiste est coupable" et C : "Charles est coupable".

1. Exprimer les informations I_1, I_2, I_3 et I_4 à l'aide des propositions A, B et C.
   On a
   — I_1 est l'implication $\overline{C} \Rightarrow B$
   — I_2 correspond à A ou C
   — I_3 est une implication $B \Rightarrow A$
   — I_4 est une implication $A \Rightarrow \overline{B}$
2. Construire les tables de vérités associées.

A	B	C	$\overline{C} \Rightarrow B$	A ou C	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow \overline{B}$	Réponse 3.
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F

3. Qui a volé les goûters ?
   Il semblerait que Charles ait fait le coup (Arthur a le bénéfice du doute).

4. Retrouver le résultat de la question 3. par une autre méthode (autre que les tables de vérités).

   — B est forcément faux (ie Baptiste est innoncent) :
   en effet, si B est vrai, alors A aussi (d'après I_3 : $B \Rightarrow A$) et si A est vrai, alors $\overline{B}$ est vrai (d'après I_4 : $A \Rightarrow \overline{B}$) : or on ne peut pas avoir B et $\overline{B}$ vraies, donc notre hypothèse "B est vrai" est absurde. D'où B est faux.

   — C est forcément vrai (ie Charles est coupable) :
   en effet, si C est innocent (ie $\overline{C}$ vrai), alors B est vrai (d'après I_1). Mais si B est vrai, alors A aussi (d'après I_3 : $B \Rightarrow A$) et si A est vrai, alors $\overline{B}$ est vrai (d'après I_4 : $A \Rightarrow \overline{B}$) : or on ne peut pas avoir B et $\overline{B}$ vraies, donc notre hypothèse "C est innocent" est absurde. D'où C est vrai.

   — A peut être coupable : puisque si A coupable, alors B innocent (d'après I_4), et si B innocent, alors C coupable (d'après I_1). Et on sait justement que B est innocent et que C est coupable. Cette implication est donc vraie !
   Mais A peut également être innocent : puisque si A innocent (ie $\overline{A}$ est vrai), alors C coupable (d'après I_2). Et on sait justement que C est coupable : Cette implication est donc vraie aussi !

Exercice 4 *[4 points]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{j=1}^{n} ln(j)$. On rappelle que $ln(a) + ln(b) = ln(a \times b)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} ln(j) &= ln\left(\prod_{j=1}^{n} j\right) && \sharp \text{ déf. du logarithme} \\ &= ln\,(n!) && \sharp \text{ car } \prod_{j=1}^{n} j = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = n! \end{aligned}$$

2. $\prod_{k=0}^{n} e^k$. On rappelle que $exp(a) \times exp(b) = e^a \times e^b = e^{a+b}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n} e^k &= e^{\sum_{k=0}^{n} k} && \sharp \text{ déf. de l'exponentielle} \\ &= e^{\frac{n(n+1)}{2}} && \sharp \text{ déf. somme d'une suite arithmétique : } \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Fin.

Exercice 5 *Bonus [2 points]*
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \in \{0, ..., n\}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+k}{k}\binom{n}{p} = \binom{n+k}{p+k}\binom{p+k}{k}$$

On sait que $\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Ainsi, on a d'un côté :

$$\binom{n+k}{k}\binom{n}{p} = \frac{(n+k)!}{k!(n+k-k)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(n+k)!}{k!p!(n-p)!}$$

Et d'autre part :

$$\binom{n+k}{p+k}\binom{p+k}{k} = \frac{(n+k)!}{(p+k)!(n+k-(p+k))!} \times \frac{(p+k)!}{k!(p+k-k)!} = \frac{(n+k)!}{(n-p)!k!p!}$$

D'où l'égalité.