karam.fayad@eisti.eu

Interrogation du 25 mars - Corrigé

1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,1,2),(0,1,-1),(2,-1,7))$ est-elle libre ? Justifier.

   Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\cdot(1,1,2)+\beta\cdot(0,1,-1)+\gamma\cdot(2,-1,7)=0$, d'où le système

   $$\begin{cases}\alpha+2\gamma=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ 2\alpha-\beta+7\gamma=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha=-2\gamma\\ \beta=3\gamma\end{cases}$$

   Ainsi, la famille est liée. Par exemple, pour $\gamma=1$, on a

   $$-2\cdot(1,1,2)+3\cdot(0,1,-1)+(2,-1,7)=0.$$

2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $(1+X,2+X,2+X+X^2)$ est-elle libre ? Justifier.

   Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\cdot(1+X)+\beta\cdot(2+X)+\gamma\cdot(2+X+X^2)=0$, on a alors : $\alpha+\beta+2\gamma+(\alpha+2\beta+\gamma)X+\gamma X^2=0$ d'où le système

   $$\begin{cases}\alpha+2\beta+2\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \gamma=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ \alpha+\beta=0\\ \gamma=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

   Ainsi la famille est libre.

3. Sans utiliser les vecteurs de la base canonique,
   (a) donner dans $\mathbb{R}^3$ une famille libre $\mathcal{F}$ qui n'engendre pas $\mathbb{R}^3$. Justifier votre choix.
   On sait que dans $\mathbb{R}^3$, toute famille libre contient au plus 3 vecteurs, et que toute famille libre contenant 3 vecteurs est une base. Ainsi, une famille libre mais non génératrice contient nécessairement strictement moins que 3 vecteurs. On choisit donc une famille libre d'un seul vecteur (un vecteur quelconque non nul), ou de deux vecteurs (deux vecteurs non colinéaires).
   Prenons par exemple la famille formée des deux vecteurs $u=(2,0,0)$ et $v=(1,1,0)$.

   (b) compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.
   On sait que toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ peut être complétée en une base de $\mathbb{R}^3$. On choisit donc un vecteur $w\in\mathbb{R}^3$ de façon que la famille (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit que la famille (u,v,w) soit libre. Prenons par exemple $w=(0,1,1)$. On vérifie sans difficulté que la famille (u,v,w) est libre.

4. Sans utiliser les vecteurs de la base canonique,
   (a) donner une famille génératrice $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ qui ne soit pas libre. Justifier votre choix.
   On sait que dans $\mathbb{R}^3$, toute famille génératrice contient au moins 3 vecteurs, et que toute famille génératrice contenant 3 vecteurs est une base. Ainsi, une famille génératrice mais non libre contient nécessairement strictement plus que 3 vecteurs. Il suffit de prendre une famille génératrice de 3 vecteurs (donc une base) et de lui ajouter un (ou des) vecteur(s) quelconque(s).
   On prend par exemple la famille formée des quatres vecteurs $u=(2,0,0), v=(1,1,0), w=(0,1,1)$ et $t=(0,0,0)$. La famille (u,v,w) est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ (il suffit de voir qu'elle est libre), donc la famille (u,v,w,t) est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

(b) extraire de $\mathcal{F}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On sait que de toute famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, on peut extraire une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ (il suffit de voir qu'elle est libre).

5. (a) Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P'(-1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
On a clairement $0 \in E$, où 0 désigne le polynôme nul.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(P, Q) \in E^2$. Montrons que $\lambda P + Q \in E$.
En effet :
- $(\lambda P + Q)'(-1) = \lambda \underbrace{P'(-1)}_{=0 \text{ car } P\in E} + \underbrace{Q'(-1)}_{=0 \text{ car } Q\in E} = 0$
- $(\lambda P + Q)''(1) = \lambda \underbrace{P''(1)}_{=0 \text{ car } P\in E} + \underbrace{Q''(1)}_{=0 \text{ car } Q\in E} = 0.$

On en déduit que $\lambda P + Q \in E$.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) En donner une base et la dimension.
Commençons par trouver une famille génératrice de E. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$, alors $P'(-1) = 0$ et $P''(1) = 0$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} P'(-1) = 0 \\ P''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2c + 3d = 0 \\ 2c + 6d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -9d \\ c = -3d \end{cases}$$

ainsi $P = a - 9dX - 3dX^2 + dX^3 = a - d(9X + 3X^2 - X^3) \in \text{vect}(1, 9X + 3X^2 - X^3)$.
On déduit que $E \subset \text{vect}(1, 9X + 3X^2 - X^3)$.
Réciproquement, $1 \in E$ et $9X + 3X^2 - X^3 \in E$, d'où l'inclusion réciproque. Ainsi

$$P = \text{vect}(1, 9X + 3X^2 - X^3).$$

De plus, les deux polynômes 1 et $9X + 3X^2 - X^3$ sont linéairement indépendants, on en déduit qu'ils forment une base de E et que E est de dimension 2.

6. (a) Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z = 2x + z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Ona clairement $(0, 0, 0, 0) \in F$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $u = (x, y, z, t), v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F. Montrons que $\lambda u + v \in F$.
En effet, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$, avec
- $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda \underbrace{(x + y + z)}_{=0 \text{ car } u\in F} + \underbrace{(x' + y' + z')}_{=0 \text{ car } v\in F} = 0$
- $2(\lambda x + x') + (\lambda z + z') + (\lambda t + t') = \lambda \underbrace{(2x + z + t)}_{=0 \text{ car } u\in F} + \underbrace{(2x' + z' + t')}_{=0 \text{ car } v\in F} = 0.$

On en déduit que $\lambda u + v \in F$.
Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(b) En donner une base et la dimension.
Commençons par trouver une famille génératrice de F. Soit $(x, y, z, t) \in F$, on a alors $x + y + z = 2x + z + t = 0$, d'où le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - t \\ z = -2y + t \end{cases}$$

Ce qui importe c'est utiliser les deux équations de départ pour exprimer deux variables

en fonctions des deux autres.
Ainsi $(x, y, z, t) = (y - t, y, -2y + t, t) = y(1, 1, -2, 0) + t(-1, 0, 1, 1) \in \text{vect}((1, 1, -2, 0), (-1, 0, 1, 1)$.
On déduit que $F \subset \text{vect}((1, 1, -2, 0), (-1, 0, 1, 1)$
Réciproquement, $(1, 1, -2, 0) \in F$ et $(-1, 0, 1, 1) \in F$, d'où l'inclusion réciproque. Ainsi

$$F = \text{vect}((1, 1, -2, 0), (-1, 0, 1, 1).$$

De plus, les deux vecteurs $(1, 1, -2, 0)$ et $(-1, 0, 1, 1)$ sont linéairement indépendants, on en déduit qu'ils forment une base de F et que F est de dimension 2.