Algèbre de Boole

Définitions

- Algèbre binaire
- Variables booléennes : ne prennent que deux valeurs **VRAI** ou **FAUX**.
- Opérateurs décrits par une **table de vérité**

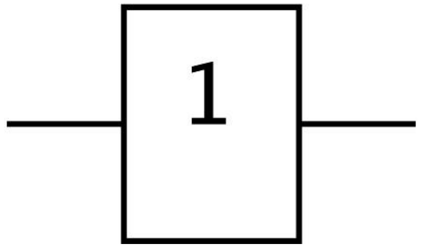
George BOOLE
(1815-1864)

Opérateur : IDENTITY

Table de vérité

X	S
0	0
1	1

Symbole



Équation

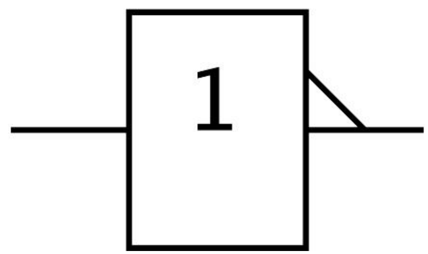
$$S = X$$

Opérateur : NOT

Table de vérité

X	S
0	1
1	0

Symbole



Équation

$$S = \neg X = \overline{X}$$

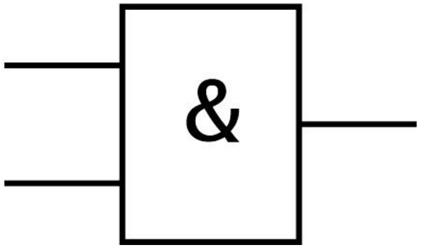
Remarque : La barre oblique est utilisée dans tous les symboles pour représenter la fonction de négation

Opérateur : AND

Table de vérité

A	B	S
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Symbole



Équation

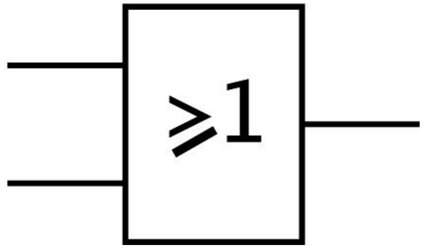
$$S = A \cap B$$
$$= A \wedge B$$
$$= AB$$
$$= A.B$$
$$= A*B$$

Opérateur : OR

Table de vérité

A	B	S
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Symbole



Équation

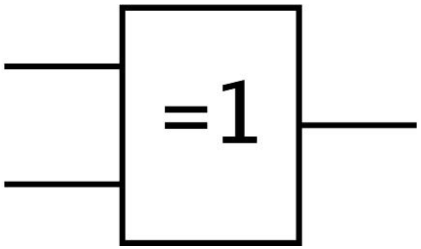
$$S = A \cup B$$
$$= A \vee B$$
$$= A + B$$

Opérateur : XOR

Table de vérité

A	B	S
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Symbole



Équation

$$S = A \oplus B$$

Propriétés

Lois	ET	OU	Lois	ET	OU
Identité	1.A = A	0+A = A	**Nullité**	0.A = 0	1+A = 1
Associativité	(A.B).C = A.(B.C)	(A+B)+C = A+(B+C)	**Commutativité**	A.B = B.A	A+B = B+A
Distributivité	A.(B+C) = A.B + A.C		**Idempotence**	A.A = A	A+A = A
Inversion	$A.\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$	**Loi de De Morgan**	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

Exercice

A l'aide des propriétés booléennes, prouvez les deux lois suivantes:

- *Absorption:* A.(A+B) = A
- *Simplification:* $A + \overline{A}B = A + B$

Problème logique

- Expressions possibles
  - Français
  - Table de vérité
  - Équation
  - Circuit logique

Exemple Majorité

« F(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. »

Représenter cette fonction sous forme de

- Table de vérité
- Equation
- Circuit logique

Table de vérité

F(A,B,C) = 1 ⇔

La majorité des variables = 1

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Equation (depuis la table de vérité)

- Forme disjonctive

- F =
  (¬A.B.C) + (A.¬B.C)
  + (A.B.¬C) + (A.B.C)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Equation (depuis la table de vérité)

- Simplifier

$$F = \neg A.B.C + A.\neg B.C + A.B.\neg C + A.B.C$$

$$= \neg A.B.C + A.\neg B.C + A.B.\neg C + A.B.C + A.B.C + A.B.C$$

$$= \neg A.B.C + A.B.C + A.\neg B.C + A.B.C + A.B.\neg C + A.B.C$$

$$= (\neg A+A).B.C + (\neg B+B).A.C + (\neg C+C).A.B$$

$$= B.C + A.C + A.B$$

Equation (depuis le tableau de Karnaugh)

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

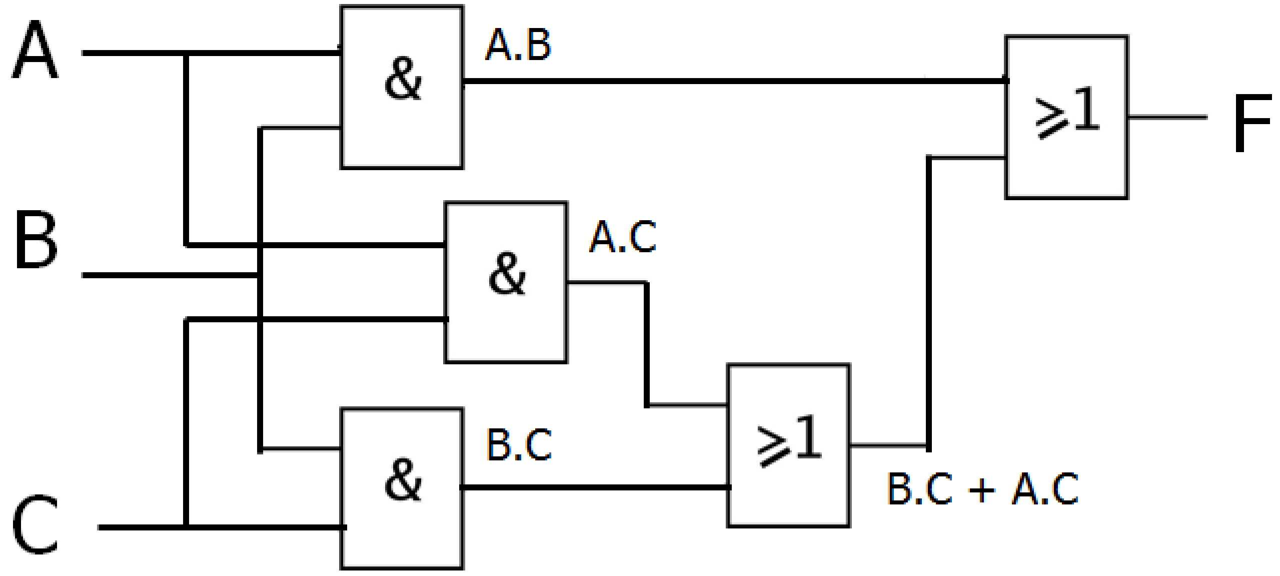
Equation (depuis le tableau de Karnaugh)

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F = B.C + A.C + A.B$$

Circuit logique

F = B.C + A.C + A.B



Exercice

« F(A,B,C,D)=1 si et seulement si:
C est égal à D,
ou bien le nombre des variables vraies est pair.. »

Représenter cette fonction sous forme de

- Table de vérité
- Equation
- Circuit logique