

Espace Préhilbertien Réel

Khalid EL AMINE I.

Department of Mathematics and Finance



Notations et conventions :

- \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} .
- E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1 Produit scalaire

1.1 Définition

Définition 1.1 (Produit scalaire)

On appelle *produit scalaire* sur E , toute forme bilinéaire symétrique positive définie sur E .

- On abrègera parfois produit scalaire en : *p.s.*

Notation : Si φ est un p.s. sur E , alors on note souvent $\varphi(x, y)$ sous la forme :

$$\langle x, y \rangle \text{ ou } (x | y) \text{ ou } x.y$$

Remarque : Un p.s. sur E induit naturellement un p.s. sur tout s.e.v. de E .

Exemple : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

Solution :

1.2 Exemples fondamentaux de produit scalaire

- Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\forall X = [x_k] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall Y = [y_k] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \forall Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$$

- Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $\forall f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

1.3 Inégalités de SCHWARZ et de MINKOWSKI

Théorème 1.2 (Inégalité de SCHWARZ)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Pour tout $x, y \in E$

-

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

- $(\langle x, y \rangle)^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ si et seulement si x et y sont liés.

Remarque : Par passage à la racine, l'inégalité de SCHWARZ s'écrit aussi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Preuve :

Exemples :

- Sur $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de SCHWARZ prend la forme :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \quad \forall x, y \in E$$

- Sur $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de SCHWARZ prend la forme :

$$(\text{tr}(A^T B))^2 \leq \text{tr}(A^T A) \text{tr}(B^T B) \quad \forall A, B \in E$$

- Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de SCHWARZ prend la forme :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right) \quad \forall f, g \in E$$

Théorème 1.3 (Inégalité de MINKOWSKI)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Pour tout $x, y \in E$

-

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

- $\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$ si et seulement si x et y sont positivement liés.

Rappel : x et y sont positivement liés $\iff \exists \lambda \geq 0 : x = \lambda y$ ou $y = \lambda x \iff (x = 0)$ ou $(y = 0)$ ou $(x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $\exists \lambda > 0 : y = \lambda x)$.

Preuve :

1.4 Norme associée à un produit scalaire

Rappelons la définition d'une norme sur un espace vectoriel.

Définition 1.4 (Norme)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle *norme* sur E , toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (Séparation)
- (2) $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (Homogénéité)
- (3) $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

Un \mathbb{K} -espace vectoriel E muni d'une norme N est appelé *espace vectoriel normé*. Il est noté (E, N) .

Théorème 1.5 Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in E$$

est une norme sur E , appelée *norme associée au produit scalaire*.

Preuve :

1.5 Exemples de normes associées au produit scalaire

- Dans \mathbb{R}^n , la norme associée au produit scalaire canonique est : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la norme associée au produit scalaire canonique est : $\forall A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\|A\| = (\text{tr}(A^T A))^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

- Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, la norme associée au produit scalaire canonique est : $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

$$\|f\| = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

2 Espace Préhilbertien Réel

2.1 Définition

Définition 2.1 (Espace préhilbertien)

On appelle *espace préhilbertien réel*, un \mathbb{R} -ev E muni d'un produit scalaire. On le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- On abrègera parfois *espace préhilbertien réel* en : *e.p.r.*

Définition 2.2 (Espace euclidien)

On appelle *espace euclidien*, un *espace préhilbertien réel de dimension finie*.

2.2 Inégalités

Convention : La norme associée au produit scalaire sera appelée *norme préhilbertienne* ou *norme euclidienne* si $\dim(E) < \infty$.

En utilisant la définition de la norme associée au produit scalaire, i.e.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

on reformule le théorème de SCHWARZ et le théorème de MINKOWSKI.

Théorème 2.3 (Inégalité de SCHWARZ)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un *espace préhilbertien réel*. Pour tout $x, y \in E$

-

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

- $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont liés.

Théorème 2.4 (Inégalité de MINKOWSKI)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un *espace préhilbertien réel*. Pour tout $x, y \in E$

-

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si x et y sont positivement liés. (i.e. $\exists \lambda \geq 0 : x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$)

2.3 Identités

Proposition 2.5 (Identités remarquables)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un *espace préhilbertien réel*. Pour tout $x, y \in E$:

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Preuve :

- $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
- $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Proposition 2.6 (Identité du parallélogramme)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un *espace préhilbertien réel*. Pour tout $x, y \in E$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve : Par addition des identités remarquables ci-dessus.

Interprétation : Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à deux fois la somme des carrés des cotés. (faire un dessin)

Proposition 2.7 *Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est préhilbertienne.*

Preuve :

Remarque : L'identité du parallélogramme permet donc de vérifier si une norme est associée à un produit scalaire ou pas.

Proposition 2.8 (Identités de polarisation)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)\end{aligned}$$

Preuve : A partir des identités remarquables.

Remarque : L'identité de polarisation (une des 2) permet de reconstituer l'expression d'un produit scalaire connaissant la norme préhilbertienne associée.

Remarque :

- 1) Si E est un e.p.r. alors E est un e.v.n. ; puisqu'à un p.s. on peut toujours associer une norme.
- 2) Réciproquement, si E est un e.v.n. et si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme, alors E est un e.p.r., dont le p.s. est obtenu par l'une des identités de polarisation.

3 Orthogonalité

3.1 Définition-Généralités

Définition 3.1 (Vecteurs orthogonaux)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

*On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, et on note $x \perp y$, si :*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Remarque : Donc par symétrie :

x et y sont orthogonaux équivaut à x est orthogonal à y équivaut à y est orthogonal à x .

Remarque : La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire choisi sur E .

Deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour un produit scalaire mais pas pour un autre.

Définition 3.2 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Un vecteur $x \in E$ est dit **isotrope** s'il est orthogonal à lui même. i.e. :*

$$\langle x, x \rangle = 0$$

Propriétés 3.3 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.*

- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs de E .
- Le vecteur nul est le seul vecteur isotrope de E .

Preuve :

- $\forall x \in E, \langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0_E + 0_E \rangle = \langle x, 0_E \rangle + \langle x, 0_E \rangle = 2 \langle x, 0_E \rangle$.
On en déduit donc que $\langle x, 0_E \rangle = 0 \Leftrightarrow 0_E \perp x$.
- $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$, car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie. 0_E est donc le seul vecteur isotrope de E .

Définition 3.4 (Orthogonal à une partie de E)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- Soit $A \subset E$ et $x \in E$. On dit que x est orthogonal à A , et on note $x \perp A$, si :

$$\forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0$$

- Soit $A, B \subset E$. On dit que A et B sont orthogonales, et on note $A \perp B$, si :

$$\forall x \in A \text{ et } \forall y \in B, \langle x, y \rangle = 0$$

Proposition 3.5 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si F est un s.e.v. de E tel que

$$F = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$$

alors, $\forall x \in E$

$$x \perp F \Leftrightarrow x \perp v_i \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

Preuve : Soit $x \in E$.

\Rightarrow] $x \perp F \Leftrightarrow \forall y \in F, x \perp y \Rightarrow$ en particulier $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x \perp v_i$.

\Leftarrow] Soit $y \in F$. On sait qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p \rangle = \alpha_1 \langle x, v_1 \rangle + \dots + \alpha_p \langle x, v_p \rangle = 0$$

D'où $\forall y \in F, x \perp y \Leftrightarrow x \perp F$

Proposition 3.6 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si F et G deux s.e.v. de E tels que

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \text{ et } G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_q)$$

Alors

$$F \perp G \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \langle u_i, v_j \rangle = 0$$

Preuve : (a faire)

Exemple : Dans \mathbb{R}^4 muni du p.s. usuel, on pose

$$F = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)) \text{ et } G = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, -1))$$

montrer que $F \perp G$.

Solution : Posons

$u_1 = (1, 0, 0, 1), u_2 = (0, 1, 0, 1)$ et donc $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

$v_1 = (0, 0, 1, 0), v_2 = (1, 1, 0, -1)$ et donc $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

On vérifie facilement que

$$\langle u_1, v_1 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_2 \rangle = 0$$

D'où $F \perp G$.

Définition 3.7 (Orthogonal d'une partie de E)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

On appelle *orthogonal de A* , et on note A^\perp , l'ensemble des vecteurs x de E orthogonaux à A :

$$A^\perp = \{x \in E \quad : \quad \forall y \in A \quad \langle x, y \rangle = 0\}$$

Proposition 3.8 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$A^\perp \text{ est un s.e.v. de } E.$$

Remarque : A^\perp est un s.e.v. de E , même si A ne l'est pas.

Preuve :

- 1) $A^\perp \subset E$, par définition de A^\perp .
- 2) $A^\perp \neq \emptyset$, car $0_E \in A^\perp$.
En effet, on sait que $\forall y \in E, \langle 0_E, y \rangle = 0$, donc en particulier $\forall y \in A, \langle 0_E, y \rangle = 0$.
- 3) Soit $x, x' \in A^\perp$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $\forall y \in A$

$$\langle \alpha x + x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha x + x' \in A^\perp$$

A^\perp est donc stable par combinaison linéaire. Finalement A^\perp est un s.e.v. de E .

Propriétés 3.9 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors :

- $\{0_E\}^\perp = E$
- $E^\perp = \{0_E\}$

Preuve : $\forall x \in E$

- $\langle x, 0_E \rangle = 0 \Rightarrow \{0_E\}^\perp = E$
- $x \in E^\perp \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow$ en particulier que $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$. Ainsi $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition 3.10 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $A \subset E$. Alors :

$A^\perp = (\text{Vect}A)^\perp$ (où $\text{Vect}A$ est le s.e.v. de E engendré par A).

Preuve : (Admis)

Exemple : Dans l'espace euclidien usuel $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, déterminer F^\perp , où

$$F = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (-1, 1, 0)\}$$

Solution : Rappelons que F^\perp est un s.e.v. de E .

Posons $v_1 = (1, 0, -1)$ et $v_2 = (-1, 1, 0)$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Leftrightarrow x \perp v_1 \text{ et } x \perp v_2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, v_1 \rangle = 0 \text{ et } \langle x, v_2 \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0 \text{ et } -x_1 + x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_3 \text{ et } x_1 = x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \\ &\Leftrightarrow x = x_1(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $F^\perp = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.

Remarque : **Attention**, dire que deux s.e.v. de E (ou deux parties de E) sont orthogonaux ne signifie pas que l'un est l'orthogonal de l'autre. Penser à l'exemple de deux droites perpendiculaires dans l'espace \mathbb{R}^3 .

Exemple : \mathbb{R}^3 est muni du p.s. usuel. Soit

$$D_1 = \text{Vect}((1, 0, 0)) = \{(a, 0, 0) ; a \in \mathbb{R}\}$$

$$D_2 = \text{Vect}((0, 1, 0)) = \{(0, b, 0) ; b \in \mathbb{R}\}$$

On a

$$D_1 \perp D_2 \text{ car } \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0$$

Mais

$$(D_1)^\perp = P = \text{Vect}((0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \{(0, b, c) ; b, c \in \mathbb{R}\}$$

3.2 Famille orthogonale, famille orthonormale

Définition 3.11 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et I un ensemble d'indices quelconque.

- Une famille $\{x_i\}_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **orthogonale** si :

$$\forall i, j \in I \quad (i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0)$$

- Une famille $\{x_i\}_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **orthonormale** si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_i\}_{i \in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I \quad \|x_i\| = 1 \end{array} \right.$$

- Si $\{x_i\}_{i \in I}$ est une base de E , alors on parle de base orthogonale ou de base orthonormale.

On abrègera parfois base orthonormale en : b.o.n.

Proposition 3.12 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et I un ensemble d'indices quelconque. Toute famille orthogonale $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs tous **non-nuls** de E est libre.

Preuve : Soit J une partie finie de I . Si $\sum_{j \in J} \alpha_j x_j = 0$, alors pour tout $k \in J$:

$$0 = \left\langle \sum_{j \in J} \alpha_j x_j, x_k \right\rangle = \sum_{j \in J} \alpha_j \langle x_j, x_k \rangle = \alpha_k \langle x_k, x_k \rangle = \alpha_k \|x_k\|^2 \Rightarrow \alpha_k = 0, \text{ car } \|x_k\| \neq 0$$

Remarque : En conséquence : toute famille orthonormale $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs de E est libre.

Théorème 3.13 (Formule de PYTHAGORE)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. $\forall x, y \in E$:

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve : $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Proposition 3.14 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie d'éléments de E :

$$\{x_i\}_{1 \leq i \leq p} \text{ est orthogonale} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$$

La réciproque est fautive pour $p \geq 3$.

Preuve : Par récurrence ou bien directement en écrivant :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^p x_i, \sum_{i=1}^p x_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p x_i, \sum_{j=1}^p x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle x_i, x_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \langle x_i, x_i \rangle \quad \text{car } \langle x_i, x_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \\ &= \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 \end{aligned}$$

- Montrons par un contre exemple que la réciproque est fautive si $p \geq 3$.

Considérons l'espace euclidien usuel $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$ et $x_3 = (1, -1)$. On a

$$\|x_1 + x_2 + x_3\|^2 = \|(1, 0) + (0, 1) + (1, -1)\|^2 = \|(2, 0)\|^2 = 4$$

$$\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 = \|(1, 0)\|^2 + \|(0, 1)\|^2 + \|(1, -1)\|^2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

Les deux quantités sont égales, mais les vecteurs ne sont pas deux à deux orthogonaux. Par exemple

$$\langle x_1, x_3 \rangle = 1 \neq 0$$

3.3 Procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT

Théorème 3.15 (Orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT)

Soit $(E; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille libre de E .

La famille $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ définie par récurrence par :

$$q_1 = v_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{2, \dots, p\} \quad q_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, q_i \rangle}{\|q_i\|^2} q_i$$

Vérifie :

- $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ est une famille orthogonale
- $\text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \text{Vect}\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$

► Pour obtenir une famille orthonormale, on normalise les vecteurs q_i , i.e., on pose

$$\varepsilon_i = \frac{q_i}{\|q_i\|}, \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

La famille obtenue $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}$ est une famille orthonormale.

Preuve : (Admis)

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire canonique. Soit $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ avec :

$$v_1 = (0, 0, 1, 1) \quad ; \quad v_2 = (0, 0, 1, 0) \quad ; \quad v_3 = (1, 1, 1, 0)$$

Déterminer une base orthonormale de F .

Solution :

3.4 Base orthonormale et espace euclidien

Définition 3.16 (Espace euclidien)

On appelle espace euclidien, tout espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Proposition 3.17 Tout espace euclidien E admet une base orthonormale.

Preuve : On part d'une base quelconque de E et on utilise le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

Exemples : Dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique :

- 1) La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .
- 2) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 , où

$$\varepsilon_1 \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

- 3) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 , où

$$\varepsilon_1 \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad ; \quad \varepsilon_3 \equiv \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Théorème 3.18 *Toute famille orthonormale d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale de E .*

Preuve : On utilise le théorème de la base incomplète et on orthonormalise les vecteurs ajoutés grâce au procédé de GRAM-SCHMIDT.

Proposition 3.19 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, \mathcal{B} une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors :*

- \mathcal{B} est orthogonale si et seulement si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.
- \mathcal{B} est orthonormale si et seulement si $A = I_n$.

Preuve : Posons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par définition : $A = [\langle e_i, e_j \rangle]_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 3.20 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et \mathcal{B} une base orthonormale de E . Pour tout $x, y \in E$, en notant $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$:*

$$\langle x, y \rangle = X^T Y$$

Preuve : La matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans une base orthonormale est I_n .

Remarque importante : Dans un espace euclidien muni d'une b.o.n., le produit scalaire de 2 vecteurs s'exprime comme le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n .

Proposition 3.21 (Règles de calcul en base orthonormale)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Pour tout $x, y \in E$

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \quad ; \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \quad ; \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

Preuve : A faire.

4 Supplémentaire orthogonal

4.1 Supplémentaire

Deux s.e.v. supplémentaires

$$(E_1 \oplus E_2 = E) \iff (E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont deux s.e.v. supplémentaires de } E)$$

► Cas 1 : Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension quelconque

$$\begin{aligned} (E_1 \oplus E_2 = E) &\iff (E_1 + E_2 = E \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\}) \\ &\iff (\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x = x_1 + x_2) \end{aligned}$$

► Cas 2 : Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie :

• En utilisant les bases :

$$\begin{aligned} (E_1 \oplus E_2 = E) &\iff (\exists \mathcal{B}_1 \text{ une base de } E_1 \text{ et } \exists \mathcal{B}_2 \text{ une base de } E_2 : (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \text{ soit une base de } E) \\ &\iff (\forall \mathcal{B}_1 \text{ une base de } E_1 \text{ et } \forall \mathcal{B}_2 \text{ une base de } E_2 ; (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \text{ est une base de } E) \end{aligned}$$

• En utilisant les dimensions :

$$\begin{aligned} (E_1 \oplus E_2 = E) &\iff (\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E) \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\}) \\ &\iff (\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E) \text{ et } E_1 + E_2 = E) \end{aligned}$$

4.2 Supplémentaire orthogonal

Définition 4.1 (Supplémentaire orthogonal)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Deux s.e.v. E_1 et E_2 de E sont dit *supplémentaires orthogonaux* dans E si :

$$\begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 \\ E_1 \perp E_2 \end{cases}$$

On note :

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$$

Proposition 4.2 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Si E_1 et E_2 sont deux s.e.v. de E supplémentaires orthogonaux dans E , i.e. :

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$$

alors :

$$E_1^\perp = E_2 \quad \text{et} \quad E_2^\perp = E_1$$

Remarque : $(E_1^\perp)^\perp = E_1$ et $(E_2^\perp)^\perp = E_2$.

Preuve :

Proposition 4.3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F est un s.e.v. de E .

Si F est de dimension finie, alors :

- $E = F \oplus F^\perp$ (tout s.e.v. de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal)
- $(F^\perp)^\perp = F$

Preuve :

Remarque : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F est un s.e.v. de E .

Si F est de dimension infinie, alors il se peut que F n'ait pas de supplémentaire orthogonal.

- F^\perp existe toujours, et de plus c'est un s.e.v. de E .
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ est toujours vrai.

Cependant

- On n'a pas nécessairement $E = F \oplus F^\perp$, i.e : F peut ne pas admettre de supplémentaire \perp .
- On n'a pas nécessairement $(F^\perp)^\perp = F$.

Exemple : Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Considérons le s.e.v. de E

$$H = \{f \in E : f(0) = 0\}$$

H est un hyperplan de E , puisque H est le kernel de la forme linéaire non nulle

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi(f) = f(0) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que $H^\perp = \{0_E\}$.
- 2) En déduire que $F \oplus F^\perp \neq E$ et que $(F^\perp)^\perp = E \neq F$

Solution :

Corollaire 4.4 Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, alors tout s.e.v. F de E admet un supplémentaire orthogonal et :

- $F \oplus F^\perp = E$
- $(F^\perp)^\perp = F$
- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$

Preuve : Conséquence de la proposition précédente.

5 Projection orthogonale

5.1 Projection

Définition 5.1 Soit E un \mathbb{K} -ev. On appelle *projection de E* , un endomorphisme p de E tel que :

$$p \circ p = p$$

- On dit aussi que p est un *projecteur de E*

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2$ et p l'application définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$p(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

Montrer que p est un projecteur de E .

Solution :

- (1) On montre facilement que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- (2) Montrons que $p^2 = p$. $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $p^2(x_1, x_2) = p(p(x_1, x_2)) = p(x_1, 0) = (x_1, 0) = p(x_1, x_2)$.

Proposition et définition 5.2 Soit E un \mathbb{K} -ev. Soit F et G deux s.e.v. de E tels que

$$E = F \oplus G$$

L'application notée p_F définie par :

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus G &\longrightarrow F \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

est une projection de E , appelée *projection de E sur F parallèlement à G* .

Remarque : Toute décomposition de E en somme directe permet de définir une projection de E .

Preuve :

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \text{Vect}((1, 1))$ et $E_2 = \text{Vect}((0, 1))$.

- 1) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
- 2) Soit p la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2 . Expliciter $p(a, b)$.
- 3) Calculer $p(1, 0)$ et $p(0, 1)$. En déduire la matrice de p dans la base canonique de E .

Solution :

Proposition 5.3 Soit E un \mathbb{K} -ev ; F et G deux s.e.v. de E tels que

$$E = F \oplus G$$

Si p_F est la projection de E sur F parallèlement à G , alors :

- 1) $\forall x \in E : x \in F \Leftrightarrow p_F(x) = x$
- 2) $\forall x \in E : x \in G \Leftrightarrow p_F(x) = 0_E$
- 3) $Im(p_F) = F$
- 4) $Ker(p_F) = G$

Preuve :

Proposition 5.4 Soit E un \mathbb{K} -ev. Si p est un projecteur de E , alors

- 1) $E = Im(p) \oplus Ker(p)$
- 2) p est la projection de E sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Remarque : Réciproquement, toute projection de E permet de construire une décomposition de E en somme directe.

Preuve : (voir TD)

Exemple : Soit $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit p l'endomorphisme de E défini par

$$p : E \longrightarrow E$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + y + z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 1) Montrer que p est un projecteur de E .
- 2) Déterminer $Im p$ et $Ker p$. En déduire une somme directe de E et caractériser p .

Solution : (voir TD)

Remarque :

- 1) Si $F = \{0_E\}$, alors p_F est l'application nulle.
- 2) Si $F = E$, alors p_F est l'application identité.

Remarque : L'application

$$p_G : E = F \oplus G \longrightarrow G$$

$$x = x_1 + x_2 \longmapsto p_G(x) = x_2$$

est aussi une projection de E , appelée **projection de E sur G parallèlement à F** .

On dit que p_F et p_G sont les projections de E associées à la décomposition $E = F \oplus G$. De plus

$$p_F + p_G = id_E \quad \text{et} \quad p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = o$$

En pratique : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Pour montrer que p est une projection de E :

- Il suffit de montrer que $p \circ p = p$.
 p est alors la projection de E sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.
- Il suffit aussi de trouver deux s.e.v. F et G supplémentaires dans E tels que :
 $\forall x \in F, p(x) = x$ et $\forall x \in G, p(x) = 0_E$.
 p est alors la projection de E sur F parallèlement à G .

5.2 Projection orthogonale

5.2.1 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension quelconque

Définition 5.5 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un s.e.v. de E tel que :

$$E = F \oplus F^\perp$$

On appelle *projection orthogonale de E sur F* , la projection de E sur F parallèlement à F^\perp .

Remarque :

- Si $E = F \oplus F^\perp$, alors on peut projeter sur F ou sur F^\perp , par conséquent, on peut appliquer tous les résultats vu sur les projections.
- Cependant, le supplémentaire orthogonal d'un s.e.v. F de dimension infinie n'existe pas toujours, nous allons donc restreindre notre étude aux projections sur des s.e.v. de dimension finie.

5.2.2 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

Théorème 5.6 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un s.e.v. de E de dimension finie n . On sait que :

$$E = F \oplus F^\perp$$

Soit p_F la projection orthogonale de E sur F .

- Pour $x \in E$, $p_F(x)$ est appelé *projeté orthogonal de x sur F* et on a :

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \forall x \in E$$

- Si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormale de F , alors p_F est défini par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \quad \forall x \in E$$

Preuve :

Exemple : Projection orthogonale sur une droite vectorielle :

Soit $a \in E$ non nul. Soit $D = \mathbb{R}a$, la droite vectorielle engendrée par a . Une base orthonormale de D est $\frac{1}{\|a\|}a$ et pour tout $x \in E$, on a :

$$p_D(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

Proposition 5.7 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un s.e.v. de E de dimension finie. Soit p_F la projection orthogonale de E sur F . Alors :

- 1) $\forall x \in E : x \in F \Leftrightarrow p_F(x) = x$
- 2) $\forall x \in E : x \in F^\perp \Leftrightarrow p_F(x) = 0_E$
- 3) $Im(p_F) = F$ et $Ker(p_F) = F^\perp$

Preuve :

Proposition 5.8 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un s.e.v. de E . Si p_F est la projection orthogonale de E sur F , alors :

- 1) $p_F + p_{F^\perp} = id_E$
- 2) $p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$

Preuve :

Définition 5.9 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -ev normé, F un s.e.v. de E et $x \in E$. On appelle distance de x à F , le réel positif :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Remarque : Intuitivement, la distance de x à F est la plus petite des distances entre x et les vecteurs de F . Cependant, rien ne nous garantit l'existence d'une distance minimale. Noter que la définition a bien un sens car $\{\|x - y\| ; y \in F\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée ; elle admet donc une borne inférieure.

Théorème 5.10 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un s.e.v. de E de dimension finie. Si p_F est la projection orthogonale de E sur F , alors :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Preuve :

Remarque : Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, alors pour tout F s.e.v. de E , on a

$$\forall x \in E : p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x \Leftrightarrow x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$$

Par conséquent, on a également

$$d(x, F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$$

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire canonique. Soit $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ avec :

$$v_1 = (0, 0, 1, 1) \quad ; \quad v_2 = (0, 0, 1, 0) \quad ; \quad v_3 = (1, 1, 1, 0)$$

- 1) Déterminer une base orthonormale de F .
- 2) Soit $u = (1, 0, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1, 1)$. Calculer $d(u, F)$ et $d(v, F)$.

Solution :