DS2 - Algèbre - Prépa 2.

Exercice 1. $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$$

1) * Symétrie évidente. $\langle P,Q\rangle = \langle Q,P\rangle$

* bilinéarité :

$$\begin{aligned}\langle P, \lambda Q+R\rangle &= P(0)(\lambda Q+R)(0) + P'(0)(\lambda Q+R)'(0) + P''(0)(\lambda Q+R)''(0)\\ &= \lambda[P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)]\\ &\quad + P(0)R(0) + P'(0)R'(0) + P''(0)R''(0)\\ &= \lambda\langle P,Q\rangle + \langle P,R\rangle.\end{aligned}$$

d'où la linéarité à droite

de plus, on a la symétrie, d'où la bilinéarité.

* positivité: $\langle P,P\rangle = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0$

* séparation : $\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 = 0$

$\Rightarrow P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$

$\Rightarrow 0$ est une racine au moins triple de P

or $\deg(P) \leq 2$ donc $P = 0$.

ainsi $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) a) $\langle 1+X, 2+X+3X^2\rangle = ?$

Soit $P = 1+X \qquad Q = 2+X+3X^2$

$P(0)=1$	$P'(X)=1$	$P'(0)=1$	$P''(X)=0$	$P''(0)=0$
$Q(0)=2$	$Q'(X)=1+6X$	$Q'(0)=1$	$Q''(X)=6$	$Q''(0)=6$

d'où $\langle 1+X, 2+X+3X^2\rangle = 2+1+0 = 3$

donc P et Q ne sont pas orthogonaux.

b) De même, on trouve $\langle 3+2X, X^2\rangle = 0$ donc $(3+2X)\perp(X^2)$.

c) $\text{vect}(1+X, 3+2X)$ et $\text{vect}(X^2)$

on a : $(1+X) \perp (X^2)$ car $\langle 1+X, X^2 \rangle = 0$

$(3+2X) \perp (X^2)$ car $\langle 3+2X, X^2 \rangle = 0$

d'où $\text{vect}(1+X, 3+2X) \perp \text{vect}(X^2)$

$$\left[\text{Soit } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \langle a(1+X)+b(3+2X), cX^2 \rangle = ac\langle 1+X, X^2 \rangle + bc\langle 3+2X, X^2 \rangle = 0 \right)$$

3) a) $\langle 1, X \rangle = 0$

$\langle 1, X^2 \rangle = 0$ par simple calcul.

$\langle X, X^2 \rangle = 0$

b) $(1, X, X^2)$ étant une base orthogonale, alors la famille $\left(\frac{1}{\|1\|} 1, \frac{1}{\|X\|} . X, \frac{1}{\|X^2\|} . X^2 \right)$ devient une base orthonormale.

$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 1$

$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = 1$

$\|X^2\|^2 = \langle X^2, X^2 \rangle = 4$ d'où $\|X^2\| = 2$

ainsi $\left(1, X, \frac{1}{2}X^2\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.

$F = \text{vect}(u=(1,1,0),\ v=(0,1,1))$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculons $p_F(a,b,c)$

$\ast$ $p_F(a,b,c) \in F \Rightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $p_F(a,b,c) = x.u + y.v$
$= (x, y, y)$.

$\ast$ $(a,b,c) - p_F(a,b,c) \in F^{\perp} = \text{vect}(u,v)^{\perp} = \{u,v\}^{\perp}$

ainsi $\begin{cases} \langle (a,b,c) - (x,y,y),\ u \rangle = 0 \\ \langle (a,b,c) - (x,y,y),\ v \rangle = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \langle (a-x, b-y, c-y),\ (1,0,0) \rangle = 0 \\ \langle (a-x, b-y, c-y),\ (0,1,1) \rangle = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} a - x = 0 \\ b-y+c-y = 0 \end{cases}$ ainsi $\begin{cases} x = a \\ y = \frac{1}{2}(b+c) \end{cases}$

on en déduit que $p_F(a,b,c) = \left(a, \frac{1}{2}(b+c), \frac{1}{2}(b+c)\right)$.

ainsi $p_F(1,0,0) = (1,0,0)$

$p_F(0,1,0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$p_F(0,0,1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1) $\forall (f,g) \in E^2$, on a :

$$\forall t \in]0,1] \quad |t^2 f(t) g(t)| \leq \frac{1}{2}\left(t^2 f(t)^2 + t^2 g(t)^2\right)$$

car $(tf(t) + tg(t))^2 \geq 0 \Rightarrow -2t^2 f(t) g(t) \leq t^2 f(t)^2 + t^2 g(t)^2$

$(tf(t) - tg(t))^2 \geq 0 \Rightarrow 2t^2 f(t) g(t) \leq t^2 f(t)^2 + t^2 g(t)^2$.

ainsi $|t^2 fg| \leq \frac{1}{2}(t^2 f^2 + t^2 g^2)$

or $\int_0^1 (t^2 f^2 + t^2 g^2) dt$ converge car $f, g \in E$

d'où $\int_0^1 t^2 fg \, dt$ est absolument convergente, donc convergente.

2) - Symétrie évidente.

- bilinéarité : découle de la linéarité de l'intégrale

- positivité : $\langle f, f \rangle = \int_0^1 t^2 f(t)^2 dt \geq 0$

car $t \longmapsto t^2 f(t)^2$ est continue positive et intégrable sur $]0,1]$.

- séparation : $\langle f, f \rangle = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 t^2 f(t)^2 dt = 0 \Rightarrow \forall t \in]0,1]$, $t^2 f(t)^2 = 0$

$\Rightarrow f = 0$.

3) a) $h(t) = \ln t$. M.q. $h \in E$.

$\int_0^1 t^2 (\ln t)^2 dt$ converge ? Il s'agit d'une intégrale impropre en 0.

or $t^{\frac{1}{2}} t^2 (\ln t)^2 = t^{\frac{5}{2}} (\ln t)^2 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ (croissances comparées) donc $t^2(\ln t)^2 \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge d'où $\int_0^1 t^2 (\ln t)^2 dt$ converge

et $h \in E$

b) $\langle f_n, h\rangle = \int_0^1 t^2 . t^n \ln t \, dt = \int_0^1 t^{n+2} \ln t \, dt.$

IPP. $u = \ln t$ $\quad du = \frac{dt}{t}$

$dv = t^{n+2} dt$ $\quad v = \frac{1}{n+3} t^{n+3}.$

d'où $\int_0^1 t^{n+2} \ln t \, dt = \cancel{\left[\frac{1}{n+3} t^{n+3} \ln t\right]_0^1} - \frac{1}{n+3} \int_0^1 t^{n+2} dt$

$= \frac{-1}{n+3} \left[\frac{1}{n+3} t^{n+3}\right]_0^1 = \frac{-1}{(n+3)^2}.$

d'où $\boxed{\langle f_n, h\rangle = \frac{-1}{(n+3)^2}}$

c) $\|h\|^2 = \langle h, h\rangle = \int_0^1 t^2 (\ln t)^2 dt$

IPP $u = (\ln t)^2$ $\quad du = \frac{2}{t} \ln t \, dt$

$dv = t^2 dt$ $\quad v = \frac{1}{3} t^3$

d'où $\|h\|^2 = \left[\frac{1}{3} t^3 (\ln t)^2\right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 \ln t \, dt$

or $\int_0^1 t^2 \ln t \, dt = \langle f_0, h\rangle = \frac{-1}{9}.$

d'où $\|h\|^2 = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{27}$; d'où $\boxed{\|h\| = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$

d) $F = \text{vect}(f_0, f_2)$

Posons $p_F(h) = a f_2 + b f_0 \quad = at^2 + b$.

on a : $h - p_F(h) \in F^\perp = \text{vect}(f_0, f_2)^\perp = \{f_0, f_2\}^\perp$

d'où $\begin{cases} \langle h - at^2 - b, 1 \rangle = 0 \\ \langle h - at^2 - b, t^2 \rangle = 0 \end{cases}$

or $\langle \ln t - at^2 - b, 1 \rangle = \langle \ln t, 1 \rangle - a \langle t^2, 1 \rangle - b \langle 1, 1 \rangle$

avec $\langle \ln t, 1 \rangle = \langle h, f_0 \rangle = \frac{-1}{9}$

$\langle t^2, 1 \rangle = \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{1}{5} \qquad \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$.

et $\langle \ln t - at^2 - b, t^2 \rangle = \langle \ln t, t^2 \rangle - a \langle t^2, t^2 \rangle - b \langle 1, t^2 \rangle$

avec $\langle \ln t, t^2 \rangle = \langle h, f_2 \rangle = \frac{-1}{25}$

$\langle t^2, t^2 \rangle = \int_0^1 t^6 \, dt = \frac{1}{7} \qquad \langle 1, t^2 \rangle = \frac{1}{5}$

d'où : $\begin{cases} \frac{-1}{9} - \frac{1}{5}a - \frac{1}{3}b = 0 \\ \frac{-1}{25} - \frac{1}{7}a - \frac{1}{5}b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}a + \frac{1}{3}b = -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{7}a + \frac{1}{5}b = \frac{-1}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = \frac{7}{6} \\ b = -\frac{31}{30} \end{matrix}$.

ainsi $\boxed{p_F(h) = \frac{7}{6}t^2 - \frac{31}{30}}$

(i.e. la fonction $t \longmapsto \frac{7}{6}t^2 - \frac{31}{30}$)

4)

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (\ln t - at^2 - b)^2 \, dt$$

$$= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \langle \ln t - at^2 - b, \ln t - at^2 - b \rangle$$

$$= \inf_{g\in F} \langle \ln t - g, \ln t - g \rangle = \inf_{g\in F} \|\ln t - g\|^2$$

$$= d(\ln t, F)^2 = \|\ln t - p_F(\ln t)\|^2$$

$$= \langle \ln t - p_F(\ln t), \ln t - p_F(\ln t) \rangle$$

$$= \langle \ln t - p_F(\ln t), \ln t \rangle \quad \text{car } \underbrace{(\ln t - p_F(\ln t))}_{\in F^\perp} \perp \underbrace{p_F(\ln t)}_{\in F}$$

$$= \langle \ln t - \tfrac{7}{6}t^2 + \tfrac{31}{30}, \ln t \rangle$$

$$= \langle \ln t, \ln t \rangle - \tfrac{7}{6}\langle t^2, \ln t \rangle + \tfrac{31}{30}\langle 1, \ln t \rangle$$

$$= \|h\|^2 - \tfrac{7}{6}\langle f_2, h \rangle + \tfrac{31}{30}\langle f_0, h \rangle$$

$$= \frac{2}{27} - \frac{7}{6}\left(\frac{-1}{25}\right) + \frac{31}{30}\left(\frac{-1}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{27} + \frac{7}{150} - \frac{31}{270} = \frac{240}{40500} = \boxed{\frac{4}{675}}.$$

Exercice 4.

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{\pi} P(t)Q(t)\sin t \, dt$$

1) $I_n = \int_0^{\pi} t^n \sin t \, dt$.

a) À l'aide d'une double IPP, on trouve

$$\boxed{I_{n+2} = \pi^{n+2} - (n+1)(n+2) I_n}$$

b) $I_0 = \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \left[\cos t\right]_0^{\pi} = \boxed{2}$

$I_1 = \int_0^{\pi} t \sin t \, dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cancel{\cos t} \, dt = \boxed{\pi}$

puis d'après (a) :

$I_2 = \pi^2 - 2I_0 = \boxed{\pi^2 - 4}$

$I_3 = \pi^3 - 6I_1 = \boxed{\pi^3 - 6\pi}$

$I_4 = \pi^4 - 12 I_2 = \boxed{\pi^4 - 12\pi^2 + 48}$

2) Posons $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$

et appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$ où $\|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1\rangle = \int_0^{1} \sin t \, dt = 2$

d'où $\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2$$

où $u_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$

$= X - \frac{1}{2}\langle X, 1 \rangle$

$= X - \frac{1}{2} I_1 = X - \frac{\pi}{2}.$

puis $\|u_2\|^2 = \langle X - \frac{\pi}{2}, X - \frac{\pi}{2} \rangle$

$= \langle X, X \rangle - \pi \langle X, 1 \rangle + \frac{\pi^2}{4} \langle 1, 1 \rangle$

$= I_2 - \pi I_1 + \frac{\pi^2}{4} I_0$

$= \frac{\pi^2}{2} - 4.$

d'où $\|u_2\| = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4} = \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{2}}$

d'où $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi^2 - 8}} \left(X - \frac{\pi}{2} \right)$

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 - 16}} (2X - \pi)}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3$$

où $u_3 = e_3 - \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$

$= X^2 - \frac{1}{2}\langle X^2, 1 \rangle - \frac{1}{2\pi^2 - 16} \langle X^2, 2X - \pi \rangle (2X - \pi).$

$= X^2 - \frac{1}{2} I_2 - \frac{1}{2\pi^2 - 16} (2I_3 - \pi I_2)(2X - \pi)$

$$= X^2 - \frac{1}{2}(\pi^2 - 4) - \frac{1}{2\pi^2 - 16}\left(2\pi^3 - 12\pi - \pi^3 + 4\pi\right)(2X - \pi)$$

$$= X^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + 2 - \frac{\pi}{2\cancel{(\pi^2-8)}}\cancel{(\pi^2-8)}\ (2X - \pi)$$

$$= X^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + 2 - \pi X + \frac{\pi^2}{2}$$

$$= X^2 - \pi X + 2$$

puis $\|u_3\|^2 = \langle X^2 - \pi X + 2, X^2 - \pi X + 2\rangle$

$$= \langle X^2, X^2\rangle - \pi\langle X^2, X\rangle + 2\langle X^2, 1\rangle$$
$$- \pi\langle X, X^2\rangle + \pi^2\langle X, X\rangle - 2\pi\langle X, 1\rangle$$
$$+ 2\langle 1, X^2\rangle - 2\pi\langle X, 1\rangle + 4\langle 1, 1\rangle$$

$$= \langle X^2, X^2\rangle - 2\pi\langle X, X^2\rangle + 4\langle X^2, 1\rangle + \pi^2\langle X, X\rangle$$
$$- 4\pi\langle X, 1\rangle + 4\langle 1, 1\rangle$$

$$= I_4 - 2\pi I_3 + 4I_2 + \pi^2 I_2 - 4\pi I_1 + 4I_0$$

$$= I_4 - 2\pi I_3 + (4 + \pi^2) I_2 - 4\pi I_1 + 4I_0$$

$$= \cancel{\pi^4} - \cancel{12\pi^2} + 48 - \cancel{2\pi^4} + \cancel{12\pi^2} + \cancel{\pi^4} - 16 - 4\pi^2 + 8$$

$$= 40 - 4\pi^2$$

d'où $\|u_3\| = \sqrt{40 - 4\pi^2} = 2\sqrt{10 - \pi^2}$

et $$\boxed{\varepsilon_3 = \frac{1}{2\sqrt{10 - \pi^2}}\left(X^2 - \pi X + 2\right)}$$