karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS1 Algèbre linéaire et bilinéaire - CPI 2
(09/03/2018)

Exercice 1 .

1. Si $m = 0$, la matrice M est équivalente à la matrice échelonnée $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{rg}(M) = 2$.

   Si $m \neq 0$, $\det(M) = 2m^2 \neq 0$, donc $\text{rg}(M) = 4$.
2. Si $m = 0$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}f) = 2$ puis $\dim(\text{Ker}f) = 2$ grâce au théorème du rang.
   Si $m \neq 0$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}f) = 4$ puis $\dim(\text{Ker}f) = 0$.
3. On suppose que $m = 0$
   (a) Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   On a $f(e_2) = f(e_3) = 0$ donc e_2 et e_3 sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\text{Ker}f$ qui est de dimension 2, ils en forment donc une base.
   $f(e_1) = e_1$ et $f(e_4) = (1, 4, 3, 2)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\text{Im}f$ qui est de dimension 2, ils en forment donc une base.
   (b) $\text{Ker}f + \text{Im}f = vect(e_2, e_3) + vect(e_1, f(e_4)) = vect(e_1, e_2, e_3, f(e_4))$.
   Ainsi, $\dim(\text{Ker}f + \text{Im}f) = \text{rg}(e_1, e_2, e_3, f(e_4)) = 4$, parsuite $\text{Ker}f + \text{Im}f = \mathbb{R}^4$.
   De plus, $\dim(\text{Ker}f \cap \text{Im}f) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) - \dim(\text{Ker}f + \text{Im}f) = 0$, ainsi $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$.
   Conclusion : $\text{Im}f \oplus \text{Ker}f = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2 .

1. $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -4 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -4 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)(1-X)(5-X)$.
   Ainsi, la matrice A possède trois valeurs propres simples : 1,4 et 5.
2. Posons $\varepsilon_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \Leftrightarrow (A - I_3)\varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases}$.

   On choisit $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow (A - 4I_3)\varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

   On choisit $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \Leftrightarrow (A - 5I_3)\varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \end{cases}$.

   On choisit $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $\det(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Par construction de $\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_3$, on a : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Par la formule de changement de bases, on a :

$$D = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 .

Notons $(1, X, X^2, X^3)$ et (e_1, e_2, e_3, e_4) les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement. On a :
$f(1) = (1, 1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$
$f(X) = (0, 1, 2, 3) = e_2 + 2e_3 + 3e_4$.
$f(X^2) = (0, 1, 4, 9) = e_2 + 4e_3 + 9e_4$.
$f(X^3) = (0, 1, 8, 27) = e_2 + 8e_3 + 27e_4$.

La matrice de f dans les bases canoniques est donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$. f est donc bijective.

Deuxième méthode :
Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ a + 3b + 9c + 27d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme M est inversible, le système précédent possède une solution unique qui est la solution triviale $a = b = c = d = 0$.
On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective. De plus, $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathbb{R}^4)$, ainsi f est bijective.

Exercice 4 .

1. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

   $P \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a - 3b + 2c = 0.$
   Ainsi, $P \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) \Leftrightarrow P = (3b - 2c) + bX + cX^2 = b(3 + X) - c(2 - X^2)$.
   La famille $(3+X, 2-X^2)$ engendre $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})$, de plus, elle est libre ; c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})$.

   $P \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id}) \Leftrightarrow (A - 4I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}.$
   Ainsi, $P \in \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id}) \Leftrightarrow P = -c + cX + cX^2 = -c(1 - X - X^2)$.
   Le polynôme $1 - X - X^2$ engendre donc $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id})$, il en forme une base.

2. Il suffit de voir que $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.
(Le vecteur coordonnées du polynôme $f^2(P) - 6f(P) + 8P$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$) est $(A^2 - 6A + 8I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Remarque : On peut faire les calculs "à la main" sachant que $f(1) = 3 - X - X^2$, $f(X) = -3 + 5X + 3X^2$ et $f(X^2) = 2 - 2X$:
$f(P) = f(a + bX + cX^2) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) = (3a - 3b + 2c) + (-a + 5b - 2c)X + (-a + 3b)X^2$
puis $f^2(P) = f(f(P)) = (3a - 3b + 2c)f(1) + (-a + 5b - 2c)f(X) + (-a + 3b)f(X^2) = ...$

Exercice 5 .

1. Comme $f^2 \neq 0$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(X) \neq 0$. Montrons que la famille $(X, f(X), f^2(X))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit de montrer que c'est une famille libre :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aX + bf(X) + cf^2(X) = 0$.
En appliquant f^2, et par linéarité, on obtient $af^2(X) + bf^3(X) + cf^4(X) = 0$, comme $f^3 = 0$, alors $f^4 = f^3 \circ f = 0$, donc $af^2(X) = 0$, or $f^2(X) \neq 0$ d'où $a = 0$.
On a donc $bf(X) + cf^2(X) = 0$. En appliquant f, on obtient $bf^2(X) = 0$ donc $b = 0$.
On a donc $cf^2(X) = 0$ d'où $c = 0$.
La famille $(X, f(X), f^2(X))$ est donc libre.
2. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Elle est de rang 2, donc Imf est de dimension 2, et $(f(X), f^2(X))$ en est une base (c'est une famille libre de deux vecteurs de Imf).
Par le théorème du rang, Ker$f$ est de dimension 1, il est engendré par le vecteur $f^2(X)$.
3. La matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1, Imf^2 est donc de dimension 1, engendré par $f^2(X)$. Ainsi Imf^2 = Ker$f$ = $vect(f^2(X))$.
D'autre part, $f(X)$ et $f^2(X)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de Kerf^2 qui est de dimension 2, ils en forment donc une base. Ainsi, Kerf^2 = Imf = $vect(f(X), f^2(X))$.