

Corrigé DS2 Algèbre linéaire et bilinéaire - Prépa 2 (19/04/2019)

Exercice 1 .

1. Comme $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, on a :

$$C = AC + B \Leftrightarrow (I_2 - A)C = B \Leftrightarrow C = (I_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = X_{n+1} - C = (AX_n + B) - (AC + B) = A(X_n - C) = AU_n.$$

- (b) Récurrence simple sur \mathbb{N} .

- (c) $P_A(X) = X^2 - X + \frac{1}{4} = (X - \frac{1}{2})^2$. Ainsi A possède une valeur propre double, qui est $\frac{1}{2}$, et le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On complète ce vecteur en une base de \mathbb{R}^2 , en ajoutant par exemple le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifiant

$$Av = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v.$$

Cela fournit une trigonalisation de A :

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$ avec $T^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Ainsi,

$$A^n = PT^nP^{-1} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & 1+n \end{pmatrix}.$$

- (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$, on trouve alors

$$\begin{cases} u_n = \frac{1-n}{2^n}u_0 + \frac{n}{2^n}v_0 \\ v_n = -\frac{n}{2^n}u_0 + \frac{n+1}{2^n}v_0 \end{cases}$$

et que u_n et v_n convergent vers 0.

3. Comme $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que $U_n = X_n - C$, on en déduit que $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ converge vers $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 .

1. $P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & 2 \\ 1 & -1 & 3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 2-X & 2-X & 2 \\ 0 & -1 & 3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & 3-X \end{vmatrix}$ en faisant successivement les deux opérations $c_1 \leftarrow c_1 + c_2$ puis $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$. Un développement par rapport à la première colonne donne alors

$$P_A(X) = (2-X)^3.$$

Ainsi 2 est une valeur propre triple de A , et l'on a la suite croissante de noyaux :

$$\text{Ker}(A - 2I_3) \subset \text{Ker}(A - 2I_3)^2 \subset \text{Ker}(A - 2I_3)^3 = \mathbb{R}^3.$$

- Le calcul du sous-espace propre de A donne $\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{vect}(u)$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On complète le vecteur u en une base de $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$. On a :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 2I_3)^2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + z = 0.$$

On choisit par exemple le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On complète la famille (u, v) en une base de $\text{Ker}(A - 2I_3)^3 = \mathbb{R}^3$. On choisit par exemple le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi une base (u, v, w) de trigonalisation de A . On a donc : $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Le réel α vérifie : $Av = \alpha u + 2v$, on trouve $\alpha = 2$.

- Les réels β et γ vérifient $Aw = \beta u + \gamma v + 2w$. On trouve $\beta = -1$ et $\gamma = 1$.

2. La matrice T trouvée précédemment s'écrit $T = 2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice N est nilpotente, avec $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k = 0$ pour tout entier $k > 2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{tT} = e^{2tI_3 + tN} = e^{2tI_3} e^{tN} = e^{2t} e^{tN}$ car $2tI_3$ et tN commutent.

Or, grâce à la nilpotence de N , on a $e^{tN} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

On trouve alors

$$e^{tT} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 2t & -t + t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La solution générale du système (S) est $X(t) = e^{tA}C$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et C est un vecteur constant

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

D'où $X(t) = e^{tA}C = e^{P(tT)P^{-1}}C = Pe^{tT}P^{-1}C = Pe^{tT}C_1$ avec $C_1 = P^{-1}C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ décrit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On trouve alors $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & -t + t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Ainsi

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

La condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donne le système $\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$ ainsi $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$.

On conclut que l'unique solution du système (S) vérifiant la condition initiale donnée est

$$\begin{cases} x(t) = (t^2 + t + 1)e^{2t} \\ y(t) = (t + 1)^2 e^{2t} \\ z(t) = (t + 1)e^{2t} \end{cases}$$

Deuxième approche (où le calcul de P^{-1} est indispensable)

La solution générale du système (S) est $X(t) = e^{tA}C$ où C est un vecteur constant $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or $C = X(0)$, ainsi on trouve l'unique solution vérifiant la condition initiale donnée :

$$X(t) = e^{tA}X(0) = Pe^{tT}P^{-1}X(0)$$

d'où

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & -t + t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 + t + 1 \\ (t + 1)^2 \\ t + 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 .

Partie I :

- Comme B est d'ordre b , alors $B^b = I_n$, alors $\det(B^b) = (\det(B))^b = 1$. Ainsi $\det(B) \neq 0$ et B est inversible.
- \Leftrightarrow Comme b divise k , alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = bq$. Ainsi $B^k = B^{bq} = (B^b)^q = I_n$.
 \Rightarrow Supposons maintenant que $B^k = I_n$ et effectuons la division euclidienne de k par b , on a donc $k = bq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < b$.
D'où $I_n = B^k = B^{bq+r} = (B^b)^q B^r = B^r$.
Comme $B^r = I_n$ et $0 \leq r < b$, par minimalité de b , on conclut que $r = 0$, d'où $k = bq$ et b divise k .
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B , il existe alors un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $BX = \lambda X$.
On déduit par récurrence sur \mathbb{N} que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k X = \lambda^k X$.
En particulier, $X = I_n X = B^b X = \lambda^b X$, d'où $(1 - \lambda^b)X = 0$. Comme $X \neq 0$, alors $\lambda^b = 1$.

Partie II :

- Comme le polynôme caractéristique de A est scindé sur \mathbb{R} , alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. Or, comme montré précédemment, les valeurs propres de A sont des racines de l'unité (car A est d'ordre fini).
On en déduit que les seules valeurs propres possibles de A sont les racines de l'unité dans \mathbb{R} : -1 et 1 .
- (a) Comme le polynôme caractéristique de A est scindé sur \mathbb{R} , alors A est trigonalisable sur \mathbb{R} , donc semblable à une matrice triangulaire supérieure à coefficients réels, ayant les mêmes valeurs propres que A , donc dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 .
(b) Comme A est d'ordre fini, alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = I_3$.
Ainsi $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = I_3$, donc B est d'ordre fini.
(c) Récurrence simple sur \mathbb{N} .
(d) B étant d'ordre fini, soit $k \geq 1$ tel que $B^k = I_3$. On déduit alors, d'après la question précédente que

$$\begin{cases} ka = 0 \\ \frac{k(k-1)}{2}ac + kb = 0 \\ kc = 0 \end{cases}$$

d'où $a = b = c = 0$, ainsi $P^{-1}AP = I_3$ d'où $A = I_3$.