

Corrigé DS3 Algèbre linéaire et bilinéaire - Prépa 2 (24/05/2019)

Exercice 1 .

- Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $(u_n \pm v_n)^2 \geq 0$, alors $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$.
Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n^2 + v_n^2)$ converge, on déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Montrons que φ définit un produit scalaire sur E : soit $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ et $w = (w_n)_n$ trois éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$

- symétrie : $\varphi(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n u_n = \varphi(v, u)$
 - bilinéarité : $\varphi(\lambda u + v, w) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n) w_n = \lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n w_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n w_n = \lambda \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$
- d'après les propriétés du \mathbb{R} -espace vectoriel des séries réelles convergentes.

Comme φ est symétrique et linéaire par rapport à la première variable, on déduit que φ est bilinéaire.

- positive : $\varphi(u, u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2 \geq 0$ étant la somme d'une série (convergente) à termes positifs.
- définie : pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$ le terme général de la suite des sommes partielles associée à la série de terme général u_n^2 :
si $\varphi(u, u) = 0$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2 = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$. Comme $(S_n)_n$ est une suite croissante à termes positifs et qui converge vers 0, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0$ et par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Ainsi $u = 0$.

Exercice 2 .

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- (a) Il suffit de considérer \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique et d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux vecteurs $X = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
- (b) On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues $[1, x] \rightarrow \mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_1^x f(t)g(t)dt.$$

On obtient l'inégalité demandée en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux fonctions données, $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t}$.

Exercice 3 .

- Une base de F est la famille $(e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (0, 1, 1))$. On orthonormalise cette base à l'aide de l'algorithme de Cauchy-Schwarz, on obtient : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$.

2. Soit $(x, y, z) \in F^\perp = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}^\perp$, alors $\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0$, ainsi $x + y = y + z = 0$, d'où $y = -x$ et $z = x$. On en déduit que le vecteur $(1, -1, 1)$ forme une base de F^\perp .
3. Soit $u = (1, 1, 1)$.
- (a) Notons p_F la projection orthogonale sur F et p_{F^\perp} la projection orthogonale sur F^\perp . On a :

$$p_F(u) = \langle u, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 + \langle u, \varepsilon_2 \rangle \cdot \varepsilon_2 = \frac{2}{3}(1, 2, 1).$$

D'où

$$u - p_F(u) = p_{F^\perp}(u) = \frac{1}{3}(1, -1, 1).$$

Ainsi $d(u, F) = \|u - p_F(u)\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $d(u, F^\perp) = \|u - p_{F^\perp}(u)\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

- (b) On a $d(u, F)^2 + d(u, F^\perp)^2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3 = \|u\|^2$.

Remarque : l'égalité précédente est vraie pour tout vecteur v :

$$\begin{aligned} d(v, F)^2 + d(v, F^\perp)^2 &= \|v - p_F(v)\|^2 + \|v - p_{F^\perp}(v)\|^2 \\ &= \|p_{F^\perp}(v)\|^2 + \|p_F(v)\|^2 \\ &= \|p_{F^\perp}(v) + p_F(v)\|^2 \text{ par Pythagore car } p_{F^\perp}(v) \perp p_F(v) \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

Exercice 4 .

1. Toutes les propriétés se montrent sans aucune difficulté.
2. (a) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in H$, alors $a + b + c + d = 0$, d'où $P = b(X - 1) + c(X^2 - 1) + d(X^3 - 1)$. De plus, la famille $(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$ est libre, elle forme donc une base de H .
- (b) On orthonormalise la base précédente à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt, on trouve la base orthonormale suivante de H

$$\left(P = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1), Q = \frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2 - X - 1), R = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3X^3 - X^2 - X - 1) \right).$$

- (c) On a :

$$\begin{aligned} p_H(X) &= \varphi(X, P) \cdot P + \varphi(X, Q) \cdot Q + \varphi(X, R) \cdot R \\ &= \frac{1}{2}(X - 1) - \frac{1}{6}(2X^2 - X - 1) - \frac{1}{12}(3X^3 - X^2 - X - 1) \\ &= -\frac{1}{4}(X^3 + X^2 - 3X + 1) \end{aligned}$$

et $d(X, H) = \|X - p_H(X)\| = \frac{1}{4} \|X^3 + X^2 + X + 1\| = \frac{1}{2}$.