karam.fayad@eisti.eu

Corrigé de l'examen de fin de semestre (18/06/2018)
Algèbre linéaire et bilinéaire - CPI 2

Exercice 1 .

1. (a) $P_A(X) = -X(X-1)(X-16)$ ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 16\}$.
Les sous-espaces propres de A sont :

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{vect}((0,1,1)), \quad E_1(A) = \mathrm{vect}((1,1,-1)), \quad E_{16}(A) = \mathrm{vect}((2,-1,1))}$$

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

(b) On a :$B^2 = A \Rightarrow S^2 = (P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}AP = D$.
Réciproquement : $S^2 = D \Rightarrow P^{-1}B^2P = D \Rightarrow B^2 = PDP^{-1} = A$.
Ainsi :

$$\boxed{B^2 = A \Leftrightarrow S^2 = D}$$

2. (a) Comme $S^2 = D$, alors $SD = DS = S^3$.

(b) Posons $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. L'égalité $SD = DS$ donne $\begin{pmatrix} 0 & b & 16c \\ 0 & e & 16f \\ 0 & h & 16i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 16g & 16h & 16i \end{pmatrix}$

d'où $b = c = d = f = g = h = 0$ et S est donc diagonale. Soit $S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$.

(c) L'égalité $S^2 = D$ donne $s_1^2 = 0, s_2^2 = 1$ et $s_3^2 = 16$.

(d) On déduit l'ensemble des quatre matrices S possibles :

$$\boxed{\left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}}$$

3. D'après la question 1b), les matrices B racines carrées de A sont les PSP^{-1}.
Les calculs de $B = PSP^{-1}$ donnent l'ensemble des quatre racines carrées de A :

$$\boxed{\left\{ \pm P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}, \pm P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \right\}}$$

4. (a) En suivant la même démarche que précédemment, un coefficient diagonal de S, disons s_1, doit vérifier $s_1^2 = -1$. Ainsi, D ne possède pas de racines carrées.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ ne possède aucune racine carrée}}$$

(b) Les coefficients diagonaux de S doivent vérifier $s_1^2 = 1, s_2^2 = 2$ et $s_3^2 = 4$.
L'ensemble des huit matrices S possibles est donc

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } N \text{ possède huit racines carrées distinctes}}$$

Exercice 2 .

1. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   • Symétrique : $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle$
   • Bilinéaire : $\langle A, \lambda B + C\rangle = \mathrm{tr}({}^tA(\lambda B + C)) = \mathrm{tr}(\lambda {}^tAB + {}^tAC) = \lambda \mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tAC) = \lambda\langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$
   D'où la symétrie par rapport à la deuxième place. Par symétrie, on a la bilinéarité.

   Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
   $$\boxed{\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2}$$
   • Positive : d'après ce qui précède, $\langle A, A\rangle \ge 0$
   • Définie : $\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$
2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle A, B\rangle^2 \le \langle A, A\rangle \cdot \langle B, B\rangle$.
   En prenant $B = I_n$ et A symétrique, et en remarquant que $\langle A, I_n\rangle = \mathrm{tr}(A)$, $\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}(A^2)$ et que $\langle I_n, I_n\rangle = \mathrm{tr}(I_n) = n$, on obtient :
   $$\boxed{(\mathrm{tr}(A))^2 \le n\ \mathrm{tr}(A^2)}$$

Exercice 3 .

1. (a) Il est simple de vérifier que $0 \in V$, $0 \in W$ et que V et W sont stables par combinaison linéaire.
   (b) Soit $(f, g) \in V \times W$, comme $g = g''$ et fg' est une primitive de $fg'' + f'g'$ sur $[0, 1]$, on a :
   $$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)g''(t) + f'(t)g'(t))\mathrm{d}t = \Big[f(t)g'(t)\Big]_0^1 = f(1)g'(1) - f(0)g'(0) = 0}$$
2. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $h_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a :
   $$\boxed{h'_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\beta \mathrm{ch}(t) - \alpha \mathrm{ch}(1 - t)}{\mathrm{sh}(1)}}$$
   d'où
   $$\boxed{h''_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\beta \mathrm{sh}(t) + \alpha \mathrm{sh}(1 - t)}{\mathrm{sh}(1)} = h_{\alpha,\beta}(t)}$$
   Ainsi $h_{\alpha,\beta} \in W$.
   (b) Soit $f \in E$, comme $h_{\alpha,\beta}(0) = \alpha$ et $h_{\alpha,\beta}(1) = \beta$, on a :
   $$\begin{aligned} f - h_{\alpha,\beta} \in V &\Leftrightarrow (f - h_{\alpha,\beta})(0) = (f - h_{\alpha,\beta})(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(0) = h_{\alpha,\beta}(0) \text{ et } f(1) = h_{\alpha,\beta}(1) \\ &\Leftrightarrow \alpha = f(0) \text{ et } \beta = f(1) \end{aligned}$$
   Ainsi,
   $$\boxed{f - h_{\alpha,\beta} \in V \Leftrightarrow \alpha = f(0) \text{ et } \beta = f(1)}$$
   (c) Soit $f \in E$, on a :
   $$\boxed{f = (f - h_{f(0),f(1)}) + h_{f(0),f(1)}}$$
   D'après 3a), $h_{f(0),f(1)} \in W$ et d'après 3b), $f - h_{f(0),f(1)} \in V$. Ainsi $f \in V + W$ d'où $E = V + W$.
   De plus, V et W étant orthogonaux, ils sont donc en somme directe (si $f \in V \cap W$, alors $\langle f, f\rangle = 0$ alors $f = 0$). On en déduit que
   $$\boxed{E = V \overset{\perp}{\oplus} W}$$

Exercice 4 .

1. Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

   • Symétrique : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle$

   • Bilinéaire : $\langle \lambda P+Q, R\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (\lambda P+Q)(t)R(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\mathrm{d}t = \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle$

   Par symétrie, on a donc la bilinéarité.

   • Positive : $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2\mathrm{d}t \geq 0$ car $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive sur $[-1, 1]$

   • Définie : $\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow P(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$ car $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive sur $[-1, 1]$. Ainsi le polynôme P admet une infinité de racines, d'où $P = 0$.

2. Soit $(P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

   • $Q_1 = \dfrac{1}{\| P_1 \|} P_1$ où $\| P_1 \| = \sqrt{2}$:

$$\boxed{Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

   • $Q_2 = \dfrac{1}{\| R_2 \|} R_2$ avec $R_2 = P_2 - \langle P_2, Q_1\rangle Q_1 = X - \dfrac{1}{2}\underbrace{\langle X, 1\rangle}_{=0} = P_2 = X$ et $\| R_2 \| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ d'où

$$\boxed{Q_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} X}$$

   • $Q_3 = \dfrac{1}{\| R_3 \|} R_3$ avec $R_3 = P_3 - \langle P_3, Q_2\rangle Q_2 - \langle P_3, Q_1\rangle Q_1 = X^2 - \dfrac{3}{2}\underbrace{\langle X^2, X\rangle}_{=0} - \dfrac{1}{2}\underbrace{\langle X^2, 1\rangle}_{=\frac{2}{3}} = X^2 - \dfrac{1}{3}$

   puis $\| R_3 \|^2 = \langle R_3, R_3\rangle = \dfrac{8}{45}$ d'où

$$\boxed{Q_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)}$$

3. Soit $P = aX^2 + bX + c \in F$, alors $P'(0) = 0$ d'où $b = 0$ et $P = aX^2 + c$. On en déduit que la famille $(1, X^2)$ est une base de F.

   D'autre part, on remarque que $X \in F^{\perp} = \{1, X^2\}^{\perp}$ car $\langle X, 1\rangle = \langle X, X^2\rangle = 0$

   Comme $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus F^{\perp}$ et que $X \in F^{\perp}$ et $X^2 + 1 \in F$, on en déduit que $p_{F^{\perp}}(Q) = X$ et

$$\boxed{p_F(Q) = X^2 + 1}$$

   Deuxième méthode :

   On applique la formule de la projection orthogonale dans une base orthonoramle.

   L'orthonormalisation de la base $(1, X^2)$ de F par le procédé de Gram-Schmidt donne la base orthonormale $\left(Q_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, Q_3 = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)\right)$.

Par la formule de l'expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale, on obtient :

$$\begin{aligned}
p_F(Q) &= \langle Q, Q_1\rangle Q_1 + \langle Q, Q_3\rangle Q_3 \\
&= \frac{1}{2}\langle X^2+X+1, 1\rangle + \frac{5}{8}\langle X^2+X+1, 3X^2-1\rangle(3X^2-1) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} + \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{15}(3X^2-1) \\
&= X^2+1
\end{aligned}$$

On a : $d(Q,F)^2 = \| Q - p_F(Q) \|^2 = \| p_{F^\perp}(Q) \|^2 = \langle X, X\rangle = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{d(Q,F) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$