karam.fayad@eisti.eu

Corrigé Partiel Algèbre linéaire et bilinéaire - Prépa 2 (10/06/2019)

Exercice 1 .
Partie I :

1. On a clairement $0 \in \mathcal{C}(A)$. Soit $(M, N) \in \mathcal{C}(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $AM = MA$ et $AN = NA$, alors

$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$$

ainsi $\lambda M + N \in \mathcal{C}(A)$. On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(P^{-1}AP) \end{aligned}$$

(b) La question précédente montre que φ est bien définie.
De plus, φ est linéaire. En effet, pour $(M, N) \in \mathcal{C}(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(\lambda M + N) = P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda P^{-1}MP + P^{-1}NP = \lambda\varphi(M) + \varphi(N).$$

Enfin, φ est bijective. En effet, soit $N \in \mathcal{C}(P^{-1}AP)$, alors N possède un unique antécédent par φ, qui est PNP^{-1} (c'est bien un élément de $\mathcal{C}(A)$, d'après la question précédente). Ainsi

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$$

Remarque : on peut montrer l'injectivité et la surjectivité séparément, ou aussi expliciter la bijection récriprque de φ : il s'agit de l'application $\varphi^{-1} : \mathcal{C}(P^{-1}AP) \longrightarrow \mathcal{C}(A)$ donnée par $\varphi^{-1}(N) = PNP^{-1}$.

Partie II :

1. On trouve $AX = 3X$, on en déduit que

$$\boxed{3 \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } X \text{ est un vecteur propre associé}}$$

2. Calculons le polynôme caractéritique P_A de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 4 & -2 \\ 3-X & 6-X & -3 \\ 3-X & 4 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 4 & -2 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 0 & 0 & -X+2 \end{vmatrix} = (3-X)(2-X)^2$$

en faisant d'abord l'opération $c_1 \leftarrow c_1 + c_2 + c_3$, puis $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$ et $l_3 \leftarrow l_3 - l_1$. On en déduit que les valeurs propres de A sont 2 et 3, et

$$\boxed{2 \text{ est une valeur propre double et } 3 \text{ est une valeur propre simple}}$$

3. Le calcul des sous-espaces propres $E_2(A)$ et $E_3(A)$ associés à 2 et 3 respectivement donne

$$E_2(A) = \text{vect}((4,3,4)) \text{ et } E_3(A) = \text{vect}((1,1,1))$$

Comme la dimension de $E_2(A)$ est 1, on déduit que A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable sur $\mathbb{R}$ (P_A étant scindé sur $\mathbb{R}$).
Complétons le vecteur $(4,3,4)$ en une base de $\text{Ker}(A-2I_3)^2$. Comme

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

on choisit par exemple le vecteur $(2,0,1)$ (qui vérifie bien $3x+4y-6z=0$). On a alors $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

où γ est donné par : $(A-2I_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; on trouve $\gamma = -1$.

Remarque : la valeur de γ n'est pas unique, et dépend du choix de la matrice P.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(T)$, alors $TM = MT$. En exploitant cette égalité, on trouve $s = t = u = x = y = 0$ et $v = z$, ainsi M est de la forme

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

Réciproquement, une telle matrice commute avec T. On en déduit que $\mathcal{C}(T)$ est l'ensemble des matrices de la forme ci-dessus.

5. D'après la question précédente, on a

$$\mathcal{C}(T) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ces trois matrices étant linéairement indépendantes, on déduit qu'elles forment une base de $\mathcal{C}(T)$ et que $\mathcal{C}(T)$ est de dimension 3. Comme $A = PTP^{-1}$, alors $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(T)$ sont isomorphes, d'après la Partie I, ils ont donc même dimension. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est de dimension } 3}$$

6. On a clairement : $I_3 \in \mathcal{C}(A)$, $A \in \mathcal{C}(A)$ et $A^2 \in \mathcal{C}(A)$, ainsi $\text{vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathcal{C}(A)$.
De plus, la famille (I_3, A, A^2) est libre (l'équation $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0$ entraîne facilement que $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Ainsi $\text{vect}(I_3, A, A^2)$ est de dimension 3, ce qui entraîne, avec l'inclusion précédente, que

$$\boxed{\text{vect}(I_3, A, A^2) = \mathcal{C}(A)}$$

Exercice 2 .

1. (a) Soit $(f,g) \in E^2$, comme $(f \pm g)^2 \geq 0$, on en déduit que $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(f^2+g^2)\mathrm{d}t$ est convergente, ainsi par le critère de comparaison ((fonctions à valeurs réelles positives), on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(g)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

(b) La fonction nulle $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est clairement un élément de E.
Soit $(f,g)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\int_0^{+\infty}(\lambda f(t)+g(t))^2\mathrm{d}t=\lambda^2\int_0^{+\infty}f(t)^2\mathrm{d}t+2\lambda\int_0^{+\infty}f(t)g(t)\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}g(t)^2\mathrm{d}t$$

est convergente car c'est la somme de trois intégrales convergentes (l'intégrale du milieu converge d'après la question précédente).

2. Montrons que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E. Soit $(f,g,h)\in E^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:
• Symétrique :

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{+\infty}f(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}g(t)f(t)\mathrm{d}t=\langle g,f\rangle.$$

• Bilinéaire : par linéarité de l'intégrale, on a

$$\langle\lambda f+g,h\rangle=\int_0^{+\infty}(\lambda f(t)+g(t))h(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{+\infty}f(t)h(t)\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}g(t)h(t)\mathrm{d}t=\lambda\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle.$$

On a ainsi la linéarité par rapport à la première variable. La symétrie entraîne alors la bilinéarité.
• Positive :

$$\langle f,f\rangle=\int_0^{+\infty}f(t)^2\mathrm{d}t\geq\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\geq 0$$

car $t\longmapsto f(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$.
• Définie : soit $A\geq 0$, on a :

$$0\leq\int_0^A f(t)^2\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}f(t)^2\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\langle f,f\rangle=0\Rightarrow\int_0^{+\infty}f(t)^2\mathrm{d}t=0\Rightarrow\int_0^A f(t)^2\mathrm{d}t=0\Rightarrow f=0\text{ sur }[0,A]$$

car $t\longmapsto f(t)^2$ est continue positive sur $[0,A]$.
On en déduit que $f=0$ sur $[0,A]$ pour tout $A\geq 0$, ainsi $f=0$ sur $[0,+\infty[$.

3. (a) Soit $A\geq 0$. On a $\displaystyle\int_0^A f_n(t)^2\mathrm{d}t=\int_0^A e^{-2nt}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2n}e^{-2nt}\right]_0^A=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}e^{-2nA}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2n}$,
ainsi

$$\boxed{f_n\in E}$$

(b) $\displaystyle\langle f_k,f_l\rangle=\int_0^{+\infty}e^{-(k+l)t}\ \mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{k+l}e^{-(k+l)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{k+l}$. Ainsi

$$\boxed{\langle f_k,f_l\rangle=\frac{1}{k+l}}$$

4. (a) On applique le précédé d'orthonrmalisation de Gram-Schmidt à la famille (libre) (f_1,f_2) pour construire une base orthonormale (g_1,g_2) de F.
On a :
• $g_1=\dfrac{1}{\parallel f_1\parallel}f_1$, avec $\parallel f_1\parallel^2=\langle f_1,f_1\rangle=\dfrac{1}{2}$, doù

$$\boxed{g_1=\sqrt{2}f_1}$$

- $g_2 = \dfrac{1}{\| h_2 \|} h_2$, où $h_2 = f_2 - \langle f_2, g_1 \rangle g_1 = f_2 - 2\langle f_2, f_1 \rangle f_1 = f_2 - \dfrac{2}{3} f_1$, puis

$$\begin{aligned}
\| h_2 \|^2 &= \langle h_2, h_2 \rangle \\
&= \langle f_2 - \frac{2}{3} f_1, f_2 - \frac{2}{3} f_1 \rangle \\
&= \langle f_2, f_2 \rangle - \frac{4}{3} \langle f_1, f_2 \rangle + \frac{4}{9} \langle f_1, f_1 \rangle \\
&= \frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{4}{18} \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{g_2 = -4f_1 + 6f_2}$$

(b) L'expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale donne :

$$\begin{aligned}
p_F(f_3) &= \langle f_3, g_1 \rangle g_1 + \langle f_3, g_2 \rangle g_2 \\
&= 2\langle f_3, f_1 \rangle f_1 + \langle f_3, 6f_2 - 4f_1 \rangle f_1 \\
&= 2\langle f_3, f_1 \rangle f_1 + [6\langle f_3, f_2 \rangle - 4\langle f_3, f_1 \rangle] (6f_2 - 4f_1) \\
&= \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{5}(6f_2 - 4f_1) \\
&= -\frac{3}{10} f_1 + \frac{6}{5} f_2
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{p_F(f_3) = -\frac{3}{10} f_1 + \frac{6}{5} f_2}$$

(c) i. Lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$, la fonction $t \longmapsto ae^{-t} + be^{-2t}$ décrit le sous-espace $F = textvect(f_1, f_2)$. Ainsi

$$E = \left\{ \int_0^{+\infty} (f_3(t) - g(t))^2, \ g \in F \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\langle f_3 - g, f_3 - g \rangle, \ g \in F\} \\
&= \{\| f_3 - g \|^2, \ g \in F\}
\end{aligned}$$

Ainsi est E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide (il contient $\| f_3 \|^2$) et minorée par 0, il possède donc une borne inférieure.

ii. On sait que $\inf(E) = \inf_{g \in F} \| f_3 - g \|^2 = \left(\inf_{g \in F} \| f_3 - g \| \right)^2 = d(f_3, F)^2$ et que cette borne inférieure de E est atteinte en l'unique vecteur $p_F(f_3)$.

D'après la question (4b), on a $p_F(f_3) = -\dfrac{3}{10} f_1 + \dfrac{6}{5} f_2$, ainsi la borne inférieure de E est atteinte en l'unique point

$$\boxed{(a, b) = \left(-\frac{3}{10}, \frac{6}{5} \right)}$$

Exercice 3 .

1. On a : $F = \text{vect}((1,1,0),(-2,0,1))$
   Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} X \in F^{\perp} &\Leftrightarrow \langle X,(1,1,0)\rangle = \langle X,(-2,0,1)\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x+y=0 \text{ et } -2x+z=0 \\ &\Leftrightarrow X = (x,-x,2x) \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{F^{\perp} = \text{vect}((1,-1,2))}$$

2. Une base orthonormale de $F^{\perp}$ est donc formé par le vecteur $u = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$.
   Soit $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} p_F(X) &= X - p_{F^{\perp}}(X) \\ &= X - \langle X,u\rangle \cdot u \\ &= (a,b,c) - \frac{1}{6}\langle (a,b,c),(1,-1,2)\rangle \cdot (1,-1,2) \\ &= (a,b,c) - \frac{a-b+2c}{6}(1,-1,2) \\ &= \frac{1}{6}(5a+b-2c, a+5b+2c, -2a+2b+2c) \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{p_F(a,b,c) = \frac{1}{6}\,(5a+b-2c, a+5b+2c, -2a+2b+2c)}$$

3. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par la question précédente, on a :

$$p_F(e_1) = \frac{1}{6}(5,1,-2),\ p_F(e_2) = \frac{1}{6}(1,5,2),\quad p_F(e_3) = \frac{1}{6}(-2,2,2)$$

   Ainsi, la matrice de p_F dans la base (e_1,e_2,e_3) est

$$\boxed{A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

4. Comme $p_F + p_{F^{\perp}} = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, alors la matrice de $p_{F^{\perp}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{I_3 - A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

Exercice 4 .

1. D'après l'énoncé, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x,x\rangle$, ainsi $\| f(x) \|^2 = \| x \|^2$ d'où

$$\boxed{\| f(x) \| = \| x \|}$$

2. Soit $x \in E$. On a :

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \| f(x) \| = 0 \Leftrightarrow \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.
Comme E est de dimension finie, on déduit que

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

Soit $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\rangle = \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))\rangle = \langle x, y\rangle$$

La première égalité étant vraie car f est orthogonal, et la deuxième car $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$. Ainsi

$$\boxed{f^{-1} \text{ est un endomorphisme orthogonal de } E}$$

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

La première égalité étant vraie car f est orthogonal et la deuxième car la famille $\mathcal{B}$ est orthonormale. On en déduit que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormale. En particulier, elle est libre, c'est donc une base de E. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est une base orthonormale de } E}$$

4. Soit λ une valeur propre réelle de f et x un vecteur propre associé. On a alors $f(x) = \lambda x$, or $\| f(x) \| = \| x \|$, ainsi $|\lambda| \cdot \| x \| = \| x \|$. Comme $x \neq 0$, on déduit que

$$\boxed{|\lambda| = 1}$$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de matrices dans la base canonique les vecteurs X et Y, respectivement. Comme ${}^tAA = I_3$, on a alors :

$$\langle g(x), g(y)\rangle = \langle AX, AY\rangle = {}^t(AX)(AY) = {}^tX{}^tAAY = {}^tXY = \langle x, y\rangle$$

On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est un endomorphisme orthogonal de } \mathbb{R}^3}$$

Remarque : dire que ${}^tAA = I_3$ est suffisant (un endomorphisme d'un espace euclidien E est orthogonal si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormale de E est orthogonale, c.-à-d. vérifie ${}^tAA = I_3$).

Exercice 5 .

1. Montrons que φ définit un produit scalaire sur E. Soit $(A, B, C) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons a_{ij} les coefficients de A.

• Symétrique :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A\ {}^tB) = \mathrm{tr}(\ {}^t(A{}^tB)) = \mathrm{tr}(B\ {}^tA) = \varphi(B, A).$$

• Bilinéaire :

$$\varphi(\lambda A + B, C) = \mathrm{tr}((\lambda A + B)\ {}^tC) = \mathrm{tr}(\lambda A\ {}^tC + B\ {}^tC) = \lambda \mathrm{tr}(A\ {}^tC) + \mathrm{tr}(B\ {}^tC) = \lambda\varphi(A, C) + \varphi(B, C).$$

Ainsi, φ est linéaire par rapport à la première variable. Étant symétrique, on déduit la bilinéarité.
Remarquons que

$$\varphi(A, A) = \mathrm{tr}(A\ {}^tA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

• Positive : Remarquons que

$$\varphi(A,A) = \mathrm{tr}(A\ {}^tA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

• Définie :

$$\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow \forall\ (i,j),\ a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

2. Toute matrice $A \in E$ s'écrit que façon unique comme la somme d'une matrice symétrique $\left(\dfrac{1}{2}(A + {}^tA)\right)$ et d'une matrice anstisymétrique $\left(\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)\right)$:

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

On en déduit que les deux sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans E.
Soit $(M,N) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}$, on a :

$$\varphi(M,N) = \mathrm{tr}(M\ {}^tN) = \mathrm{tr}(-MN) = -\mathrm{tr}(MN) = -\mathrm{tr}(NM) = -\mathrm{tr}(N\ {}^tM) = -\varphi(N,M) = -\varphi(M,N)$$

Ainsi $\varphi(M,N) = 0$, donc M et N sont deux vecteurs orthogonaux. On déduit que les deux sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont orthogonaux.
Ainsi

$$\boxed{\text{Les sous-espaces } \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{A} \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E}$$

3. (a) La famille $(E_{ii})_{i \in [\![1,n]\!]}$ forme clairement une base de H et $\dim(H) = n$.

(b) La matrice AE_{ii} est la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A, et dont les autres colonnes sont nulles. On a alors :

$$\boxed{\varphi(A, E_{ii}) = \mathrm{tr}(A\ {}^tE_{ii}) = \mathrm{tr}(AE_{ii}) = a_{ii}}$$

(c) Soit $A \in E$. On a :

$$\begin{aligned} A \in H^\perp &\Leftrightarrow A \in ((E_{ii})_{i \in [\![1,n]\!]})^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \varphi(A, E_{ii}) = a_{ii} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{H^\perp = \{A \in E,\ \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ a_{ii} = 0\}}$$

dont une base est la famille

$$\boxed{(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j}}$$

et $H^\perp$ est de dimension

$$\boxed{\dim(H^\perp) = n^2 - n}$$