EISTI	Cycle préparatoire 2ème année Examen de fin de semestre	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Lundi 19 juin 2017**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **3 heures**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (9 points)
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a pour laquelle la matrice A est trigonalisable **et** non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1 (a) Calculer le polynôme caractéristique P_A de A.

1 (b) En déduire qu'il existe un unique réel a_0 (que l'on déterminera) tel que :

$$A \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \iff a \leq a_0.$$

2.5 (c) Montrer l'équivalence :

$$A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \iff a < a_0.$$

0.5 (d) Conclure.

2. On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :

4

$$\begin{cases} u_{n+1} = -8v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 4v_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donner l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2. (8 points)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 \mathrm{d}t.$$

1. On suppose dans cette question que $x > 0$.

   2 (a) On considère l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,x]),\ f(0) = 0\}$. On définit l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par
   $$\langle f, g \rangle = \int_0^x f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$
   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E.

   1.5 (b) Déterminer une fonction $h \in E$ telle que $\forall\, f \in E,\ \langle f, h \rangle = f(x)$.

   2 (c) Montrer alors l'inégalité demandée.

0.5 2. Que peut-on dire du cas $x = 0$?

2 3. On suppose maintenant que $x < 0$. Comment peut-on adapter la question (1) pour démontrer l'inégalité demandée ?

Exercice 3. (13 points)
Soit E un espace euclidien de dimension $n > 0$, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot,\cdot \rangle$.
L'objectif de l'exercice est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :
$$\forall\, x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0.$$
Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés *endomorphismes antisymétriques.*

I - ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E^2$ par :
$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

2.5 1. Vérifier que φ est un produit scalaire.
On munit alors E de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout $P \in E$ par :
$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$
On note $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

   1 (a) Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.

   (b) 1 i. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 (où u^2 désigne l'endomorphisme $u \circ u$).

   1 ii. Vérifier que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.

   1 iii. Calculer la distance de X à $\mathrm{vect}(P_1, P_2)$.

   1 (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

   1 (d) En déduire une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E et un réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II - Caractérisation des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, développer $\langle u(x+y), x+y \rangle$.
   En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

1.5

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

2. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$.
   1 (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Donner les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   1 (b) Montrer que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.
   1 (c) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M est antisymétrique.

Algèbre linéaire et bilinéaire

Partiel du 19/06/2017 - Corrigé

Exercice 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1

1) a) $P_A(X) = \det(A - XI_3) = -(X-2)(X^2-4X+4a)$

b) A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ $\iff$ P_A est scindé sur $\mathbb{R}$
$\iff$ $X^2-4X+4a$ est scindé sur $\mathbb{R}$
1 $\iff$ $16-16a \geq 0$ (discriminant)
$\iff$ $a \leq 1$

ainsi $a_0 = 1$

c) $\Leftarrow$) si $a < a_0 = 1$,
alors $Sp(A) = \{2, 2+2\sqrt{1-a}, 2-2\sqrt{1-a}\}$
1 A possède 3 valeurs propres distinctes (car $a<1$)
donc elle est diagonalisable

$\Rightarrow$) si A est diagonalisable, alors elle est trigonalisable,
donc $a \leq a_0 = 1$
or pour $a = a_0 = 1$, $Sp(A) = \{2\}$
1.5 on a une valeur propre triple, d'où $A = 2I_3$
Impossible

ainsi $a < 1$

Finalement : A diagonalisable $\iff a < 1$.

0.5 d) d'après b) et c), A trigonalisable non diagonalisable si et seulement $a = 1$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ (avec $a = -8$).

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2

Diagonalisons A :

pour $a=-8$, $Sp(A) = \{-4, 2, 8\}$.

Sous-espaces propres : $E_{-4}(A) = \text{vect}((4,2,1))$ 1

$E_2(A) = \text{vect}((0,0,1))$ 1

$E_8(A) = \text{vect}((2,-2,-1))$ 1

Soit $A = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 12 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

et $A^n = PD^nP^{-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. 1

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8\times(-4)^n + 4\times 8^n & 8\times(-4)^n - 8^{n+1} & 0 \\ 4\times(-4)^n - 4\times 8^n & 4\times(-4)^n + 8^{n+1} & 0 \\ 2\times(-4)^n - 2\times 8^n & 2\times(-4)^n - 6\times 2^n + 4\times 8^n & 12\times 2^n \end{pmatrix}$$

et $X_n = A^n X_0$.

Exercice 2

3

1) $x > 0$. $E = \{ f \in \mathcal{C}^1([0,x]),\ f(0) = 0 \}$

a) Soient $f, g, h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

0.5 Symétrie : $\langle f, g \rangle = \langle g, h \rangle$ ok

0.5 Bilinéarité : $\langle \lambda f + g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
(par linéarité de l'intégrale)

d'où la linéarité par rapport à la 1ère variable, avec la symétrie, ça donne la bilinéarité.

0.5 Positivité : $\langle f, f \rangle = \int_0^x (f'(t))^2\, dt \geq 0$ (f'^2 est continue positive).

0.5 Séparation : $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^x (f'(t))^2\, dt = 0$

$\Rightarrow \forall\, t \in [0,x],\ f'(t) = 0$ (car f'^2 est continue positive)

$\Rightarrow f$ est constante sur $[0,x]$

or $f(0) = 0$ donc $f = 0$.

b) Soit h définie sur $[0,x]$ par $h(t) = t$.

1.5 Alors $\forall f \in E$, $\langle f, h \rangle = \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x)$.

c) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle f, h \rangle^2 \leq \|f\|^2 \|h\|^2$$

d'où $(f(x))^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2\, dt$

2

$\left(\text{car } \|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_0^x \underbrace{(h'(t))^2}_{=1}\, dt = x \right)$.

2) Rien à montrer pour $x > 0$. 0.5

3) Si $x < 0$,
on considère $E = \{ f \in \mathcal{C}^1([x,0]),\ f(0) = 0 \}$

et $\langle f, g \rangle = \int_x^0 f'(t) g'(t)\, dt$ qui est un produit scalaire sur E.

pour $h(t) = -t$,
on obtient $\forall f \in E$, $\langle f, h \rangle = \int_x^0 -f'(t)\, dt = f(x)$

2

puis par Cauchy-Schwarz ;

$$\langle f, h \rangle^2 \leq \|f\|^2 \|h\|^2$$

avec $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_x^0 (f'(t))^2 dt = -\int_0^x (f'(t))^2 dt$

et $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_x^0 (h'(t))^2 dt = \int_x^0 dt = -x$

Finalement, $f(x)^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt$.

Exercice 3.

I- $E = \mathbb{R}_2(X)$

$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$

1) Soient $P, Q, R \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

0.5 Symétrie : $\langle P,Q\rangle = \langle Q,P\rangle$ OK

0.5 Bilinéarité : $\langle \lambda P+Q, R\rangle = (\lambda P+Q)(0)R(0) + (\lambda P+Q)(1)R(1) + (\lambda P+Q)(-1)R(-1)$

$= \dots \lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle$

d'où la linéarité par rapport à la 1ère variable.
Avec la symétrie, ça entraine la bilinéarité.

0.5 Positivité : $\langle P,P\rangle = P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2 \geq 0$

Séparation : $\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2 = 0$

1 $\Rightarrow P(0) = P(1) = P(-1) = 0$

$\Rightarrow P = 0$

car P est un polynôme de degré ≤ 2 possédant au moins 3 racines $(0, 1$ et $-1)$.

2) a) $u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1)+P(-1))X$.

$P_1 = \frac{1}{2}(X^2+X)$ $\qquad P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$

M.q. $\forall P \in E$, $\langle u(P), P\rangle = 0$

Posons $P = aX^2+bX+c$. avec $a,b,c \in \mathbb{R}$.

d'où $u(P) = 2bX^2 - (2a+2c)X$

et $\langle u(P),P\rangle = \langle 2bX^2-(2a+2c)X, aX^2+bX+c\rangle$

$= 2ab\langle X^2,X^2\rangle + 2b^2\cancel{\langle X^2,X\rangle} + 2bc\langle X^2,1\rangle$

1 $- 2a(a+c)\cancel{\langle X,X^2\rangle} - 2b(a+c)\langle X,X\rangle - \cancel{2c(a+c)\langle X,1\rangle}$

$= 4ab + 4bc - 4b(a+c)$

$= 0$

car $\langle X^2,X^2\rangle = 2$ $\quad \langle X^2,X\rangle = \langle X,1\rangle = 0$ $\quad \langle X^2,1\rangle = 2$ et $\langle X,X\rangle = 2$.

b) i) $u(P_1) = \frac{1}{2} u(X^2+X)$

$= \frac{1}{2}(2X^2 - 2X)$

1

$= X^2 - X.$

$u^2(P_1) = u(u(P_1)) = u(X^2-X) = -2X^2 - 2X$

$= -4\left[\frac{1}{2}(X^2+X)\right]$

d'où $u^2(P_1) = -4P_1$

ii) $\|P_1\|^2 = \langle P_1, P_1 \rangle = 0+1+0 = 1$

$P_2 = \frac{1}{2} u(P_1) = \frac{1}{2}(X^2 - X)$

1

et $\|P_2\|^2 = \langle P_2, P_2 \rangle = 0+0+1 = 1$

Ainsi P_1 et P_2 sont unitaires.

De plus, $\langle P_1, P_2 \rangle = 0$ (calcul)

donc (P_1, P_2) est une famille orthonormale

iii) Soit p la proj. orthogonale sur vect (P_1, P_2)

$d = d(X, \text{vect}(P_1,P_2)) = \|X - p(X)\|$

avec $p(X) = \langle X, P_1 \rangle P_1 + \langle X, P_2 \rangle P_2$

$= P_1 - P_2 = X.$

c-à-d $X \in \text{vect}(P_1, P_2)$

1

et $d = 0$

<u>En effet</u>: $X = P_1 - P_2 \in \text{vect}(P_1,P_2)$ d'où $d=0$.

c) Base de $\text{Ker}(u)$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$.

$P \in \text{Ker}(u) \iff u(P) = 0 \iff 2bX^2 - (2a+2c)X = 0$

$\iff b = 0$ et $c = -a$

$\iff P = a(X^2 - 1)$

1

Ainsi $\text{Ker}(u) = \text{vect}(X^2 - 1)$.

d) Soit $P_3 = X^2 - 1$

la famille (P_1, P_2, P_3) est bien une base orthonormale.

$(\|P_3\| = 1$ et $\langle P_3, P_1 \rangle = \langle P_3, P_2 \rangle = 0)$

De plus $P_2 = \frac{1}{2} u(P_1)$ donc $P_1 = 2P_2$

et $u^2(P_1) = -4P_1 \Rightarrow u(u(P_1)) = -4P_1$

1

$\Rightarrow u(2P_2) = -4P_1 \Rightarrow u(P_2) = -2P_1$

donc la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3) est $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle$

$= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle$.

0,5

. si u est antisymétrique,

$\forall x, y \in E \quad 0 = \langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle$

ainsi $\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

1

. Réciproquement, pour $x=y$, on obtient $\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$

ainsi $\langle u(x), x\rangle = 0 \quad (\forall x \in E)$

donc u est antisymétrique.

2) a) $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j), e_i\rangle e_i$ (coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale).

1 $\quad (\forall j = 1, \dots, n)$

b) m_{ij} est la i^{e} coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$,

1 ainsi $m_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle$.

c) u antisymétrique $\Rightarrow \forall i, j = 1, \dots, n, \quad \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle$

$\Rightarrow \forall i, j = 1, \dots, n, \quad m_{ij} = -m_{ji}$

$\Rightarrow M$ est antisymétrique.

Réciproquement, si $m_{ij} = -m_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$,

1 Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$,

alors $\langle u(x), x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle u(e_i), \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \underbrace{\langle u(e_i), e_j\rangle}_{= m_{ji}}$

$= 0$ car $\forall i, j, \ m_{ij} = -m_{ji}$.