	Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année **Devoir surveillé 1**	
EISTI	*Matière* : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Vendredi 9 mars 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6 points)
Soit $m \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ m & m & 0 & 4 \\ 0 & 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M suivant les valeurs de m.
2. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ suivant les valeurs de m.
3. On suppose que $m = 0$
   (a) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) A-t-on $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? Justifier.

Exercice 2. (7 points)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le polynôme caractéristique de A et en déduire que A possède 3 valeurs propres simples que l'on déterminera.
2. Trouver dans $\mathbb{R}^3$ trois vecteurs non nuls $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels que $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = 4\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = 5\varepsilon_3$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
4. Sans utiliser la formule de changement de bases, donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Retrouver la matrice D à l'aide de la formule de changement de bases.

Exercice 3. (3 points)
Soit f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$$

Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 4. (4 points)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note id l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$ et $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id})$ et une base de $\operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{id})$.
2. Montrer que $f^2(P) = 6f(P) - 8P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 5. (5 points)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$ (où $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f^2 \circ f$).

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B} = (X, f(X), f^2(X))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire une base de $\operatorname{Im}(f)$ et une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$.