CY TECH	**Cycle préparatoire 2ème année** **Devoir surveillé 2** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Hassan Maatouk, Thi-Hien Nguyen*	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Vendredi 29 mai 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée, et tout calcul doit être détaillé.

Exercice 1. (6.5 points)

Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}_2[X]^2$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0)+P'(0)Q'(0)+P''(0)Q''(0)$$

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la norme associée.
2. Déterminer si les couples de vecteurs ou de sous-espaces vectoriels suivants sont orthogonaux pour ce produit scalaire :
   (a) $1+X$ et $2+X+3X^2$
   (b) $3+2X$ et X^2
   (c) $\text{vect}(1+X,3+2X)$ et $\text{vect}(X^2)$
3. (a) Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.
   (b) En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2. (3.5 points)

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $F=\text{vect}((1,0,0),(0,1,1))$ et p_F la projection orthogonale sur F.

Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. (11 points)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles f définies sur $]0,1]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 (tf(t))^2\mathrm{d}t$ converge. Pour $(f,g)\in E^2$, on pose

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 t^2 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Pour $(f,g)\in E^2$, montrer que $\langle f,g\rangle$ existe (c.-à-d. que l'intégrale converge).
2. Montrer que l'application $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
   On note $\|\cdot\|$ la norme associée

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction de E donnée par $f_n(t) = t^n$.
   Soit h la fonction définie sur $]0,1]$ par $h(t) = \ln(t)$.
   (a) Justifier que $h \in E$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\langle f_n, h \rangle$.
   (c) Calculer $||h||$.
   (d) On note $F = \text{vect}(f_0, f_2)$ et p_F la projection orthognale sur F. Calculer $p_F(h)$.
4. Calculer
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2(\ln(t) - a t^2 - b)^2 \mathrm{d}t$$

Exercice 4. (9 points)
On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall\, (P,Q) \in E^2, \quad \langle P,Q \rangle = \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin(t)\mathrm{d}t.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi t^n \sin(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Donner la relation entre I_n et I_{n+2}.
   On trouvera deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $\forall \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + a_n I_n = b_n$.
   (b) Calculer I_n pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$.
2. Construire une base orthonormale de E pour le produit scalaire donné.