EISTI

Département Mathématiques
CPI-2 **2017/2018**

Algèbre linéaire et bilinéaire

Devoir surveillé 2 | *6 avril 2018*

Durée : 120 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée de 5 exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3 *points*)
Considérons la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1) *En calculant la somme des colonnes de M, (c'est-à-dire $C_1 + C_2 + C_3$ où les C_i sont les colonne de M), trouver une valeur propre λ_1 de M. On notera λ_2 et λ_3 les autres valeurs propres de M.*

2) *Dans cette question, l'usage du polynôme caractéristique de M est interdit.*
Calculer la trace $tr(M)$ et le déterminant $det(M)$. En déduire λ_2 et λ_3.

Exercice 2. (4 *points*)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = (b + c) + (a + c)X + (a + b)X^2$$

Trouver une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 3. (6.5 *points*)
Soit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) *Calculer le polynôme caractéristique de A et donner ce polynôme sous forme factorisée.*
En déduire que le spectre de A est $Sp(A) = \{0, 1\}$.

2) *Justifier que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, sans la trigonaliser.*

3) *Trigonaliser A en explicitant les matrices P et T (ne pas calculer P^{-1}) telles que :*

$$A = PTP^{-1}$$

Exercice 4. (8.5 *points*)

On considère la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie pour tout entier naturel* n *par*

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ est donnée}$$

1) *Montrer que la matrice* $(I_2 - A)$ *n'est pas inversible.*

2) *Montrer qu'il n'existe pas de solution constante à cette suite récurrente, c'est-à-dire que pour toute matrice* $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$*, on a* $X \neq AX + B$*.*

3) *Montrer que* $A = PDP^{-1}$ *où* $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *inversible et* $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *diagonale.*

4) *On note* $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ *et on pose* $U_n = P^{-1}X_n$*.*

   a) *Montrer que pour tout entier naturel* n

   $$U_{n+1} = DU_n + P^{-1}B$$

   b) *Donner en fonction de* n*, l'expression des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*
   (***Indication*** *: pour la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on pourra chercher un réel* v *tel que la suite de terme général* $w_n = v_n - v$ *soit géométrique).*

   c) *En déduire une expression des suites réelles* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en fonction de* n*.*

5) *Étudier la convergence des suites réelles* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. La suite de matrices colonnes* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle convergente ?*

Exercice 5. (3 *points*)
Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1) *Calculer la matrice* $AM - MA$*.*

2) *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $f : M \mapsto AM - MA$*.*