EISTI	**Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année** **Devoir surveillé 3** *Khalid El Amine, Abdessalam El Janati, Karam Fayad, Thi Hien Nguyen*	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Vendredi 24 mai 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Sujet réservé aux classes 3, 4 et 5

Exercice 1. (4 points)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge.

Pour deux suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on pose

$$\varphi(u,v)=\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n.$$

1. Montrer que l'application $\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie, c.-à.-d. que pour tout couple $(u,v)\in E^2$, la série de terme général $u_n v_n$ converge.
   Indication : on pourra penser à majorer $|u_n v_n|$ par le terme général d'une série convergente.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 2. (3 points)

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel.
2. En déduire, après avoir précisé un produit scalaire adéquat et les vecteurs concernés, que :
   (a) pour tout $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$,
   $$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$
   (b) pour tout $x\geq 1$,
   $$\ln(x)\leq\frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$
   Indication : on pourra considérer les fonctions $f : t\longmapsto 1$ et $g : t\longmapsto \dfrac{1}{t}$

Exercice 3. (6 points)
On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère le sous-epace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x-y+z=0$.

1. Construire une base orthonormale de F.
2. Donner une base de $F^{\perp}$.
3. Soit $u=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer $d(u,F)$ et $d(u,F^{\perp})$.
   (b) En déduire que $d(u,F)^2+d(u,F^{\perp})^2=\parallel u\parallel^2$.

Exercice 4. (7 points)
Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$, $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$, $Q=b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3$ deux éléments de E. On pose

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{3}a_k b_k.$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit le sous-espace vectoriel $H=\{P\in E,\ P(1)=0\}$ de E.
   (a) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de H.
   (b) Orthonormaliser la base $\mathcal{B}$ à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt.
   (c) En déduire la projection orthogonale de X sur H puis $d(X,H)$.