EISTI	**Cycle préparatoire 2ème année** **Devoir surveillé 3**	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Vendredi 25 mai 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (7 points)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer le spectre de A.
   (b) Donner une base et la dimension des sous-espaces propres de A.
2. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit égale à

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

   avec α, β, γ des réels à déterminer et calculer P^{-1}.
3. (a) Donner une expression simple de T^n pour tout entier $n \geq 0$.
   On pourra écrire $T = \alpha I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente.
   (b) En déduire une expression de A^n pour tout entier $n \geq 0$.
4. Calculer e^A, l'exponentielle de A.

Exercice 2. (4 points)
Soit $(\mathscr{S})$ le système différentiel linéaire avec second membre

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t \\ y'(t) = x(t) - t^2 \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer la solution générale du système $(\mathscr{S})$, en utilisant la méthode de votre choix. *On pourra par exemple suivre les étapes suivantes* :

1. Déterminer la solution générale du système linéaire homogène associé à $(\mathscr{S})$.
2. Déterminer une solution particulière du système $(\mathscr{S})$.
   On pourra chercher une solution particulière où x et y sont des polynômes de degré respectif 2 et 1.
3. Déterminer la solution générale du système $(\mathscr{S})$.

Exercice 3. (9 points)
On se propose d'étudier la suite récurrente linéaire réelle d'ordre 3 définie par la donnée de $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ et par la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = AX_n$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. Calculer AX pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire si $u_0 = u_1 = u_2$?

3. Diagonaliser la matrice A.
On appellera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et on explicitera une base $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

4. On suppose dans cette question que $u_0 = 1,\ u_1 = 5$ et $u_2 = 1$.

   (a) Donner les coordonnées du vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (*c.-à-d. écrire X_0 comme combinaison linéaire de w_1, w_2, w_3*).

   (b) Pour $i \in \{1,2,3\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $A^n w_i$ en fonction de n et de w_i.

   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de n, w_1, w_2 et w_3.

   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer des valeurs de u_0, u_1 et u_2 pour lesquelles $u_{100} = 0,\ u_{101} = 2^{100}$ et $u_{102} = 0$.