Cycle Préparatoire - Deuxième année
Semestre 2 - 2016/2017
karam.fayad@eisti.eu

Algèbre linéaire et bilinéaire
TD 3 - Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1 . Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire sur E telle que :

$$\forall\, x \in E,\ f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Soit u une application de E dans E telle que :

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ f(u(x),u(y)) = f(x,y).$$

Montrer que u est un endomorphisme injectif de E.

Exercice 2 . Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E.

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.
3. $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
4. $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ et $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3 . Soit E un espace préhilbertien réel non réduit à $\{0_E\}$. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire associé. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & a\langle x,x\rangle + b\langle x,y\rangle + c\langle y,y\rangle \end{array}$$

À quelles conditions sur a, b, c l'application φ est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 4 . Montrer que pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 5 . Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que

$$\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \geq (b-a)^2.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 6 . Soit E l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que les fonctions $f_n : t \longmapsto \sin(nt),\ n \in \mathbb{N}^*$ forment une famille orthogonale de E et calculer les normes de ces fonctions.

Exercice 7 . Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'application ϕ est bien définie.
2. Montrer que l'application ϕ définit un produit scalaire sur E.
3. Trouver la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer
$$\lambda = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 + at^2 + bt + c)e^{-t}\mathrm{d}t.$$
On traduira cette question en termes de distance à un sous-espace.
5. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 8 .
1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer la distance $d(X^2, E)$ où $E = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 9 . Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et F le sous-espace vectoriel donné par

$$F = \{(x, y, z,) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 1, 1, -1)$ sur F et en déduire la distance $d(u, F)$.

Exercice 10 . Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.
1. Pour deux polynômes P et Q de E de coefficients respectifs a_k et b_k, on pose
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{3} a_k b_k.$$
Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, et que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base orthonormale de E.
2. Montrer que $F = \{P \in E, P(3) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base orthonormale de F.
3. Par deux méthodes différentes, déterminer l'image d'un polynôme $P \in E$ par le projecteur orthogonal parallèlement à F.