

---

**Exercices supplémentaires**  
**Réduction des endomorphismes**

---

**Exercice 1 .** On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $J$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  
On considère, pour tout réel  $a$ , la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

**Partie I**

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .
2. Diagonaliser la matrice  $J$ .
3. En déduire, après avoir exprimé  $M_a$  en fonction de  $J$ , que pour tout réel  $a$ , il existe une matrice diagonale  $D_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , que l'on calculera, et une matrice réelle inversible  $P$  telles que  $M_a = PD_aP^{-1}$ .
4. Déterminer l'ensemble des réels  $a$  tels que  $M_a$  soit inversible.

**Partie II**

On cherche à présent à déterminer l'ensemble des réels  $a$  tels qu'il existe une matrice  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $X^2 = M_a$ .

1. Soient  $a$  un réel et  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X^2 = M_a$ .
  - (a) Montrer que  $X$  commute avec  $M_a$  puis que  $X$  commute avec  $J$ .
  - (b) On note  $h$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $X$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de  $f$  est vecteur propre de  $h$ .
  - (c) Établir qu'il existe une matrice diagonale  $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X = P\Delta P^{-1}$  et montrer que  $\Delta^2 = D_a$ .
2. Conclure en donnant l'ensemble auquel doit appartenir le réel  $a$  pour que la matrice  $X$  vérifiant  $X^2 = M_a$  existe.

**Exercice 2 .** On considère l'application  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donnée par

$$f \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $f$ .
3.  $f$  est-il diagonalisable ? inversible ?

**Exercice 3 .** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer les sous-espaces propres de  $A$ .
  - (b) Calculer le polynôme minimal de  $A$ .
  - (c) Donner une trigonalisation de  $A$ .
  - (d) Calculer l'exponentielle de  $A$ .
2. On considère le système différentiel linéaire  $(\mathcal{S})$  suivant

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x'(t) = -4x(t) + y(t) + z(t) + 1 \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 2z(t) + t \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) - z(t) + t^2 \end{cases}$$

où  $x, y, z$  désignent des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- (a) Déterminer la solution générale du système linéaire homogène associé à  $(\mathcal{S})$ .
- (b) Déterminer une solution particulière du système  $(\mathcal{S})$  avec  $x, y, z$  des polynômes de degré 2.
- (c) Déterminer la solution générale du système  $(\mathcal{S})$ .