Notes de cours

Matrices et Systèmes Linéaires

Table des matières

1 Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Définition

• Une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

noté aussi $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$.
Le terme a_{ij} est le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.
• L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
• Si $m = 1$, on parle de matrice ligne (ou vecteur ligne) ; si $n = 1$, on parle de matrice colonne (ou vecteur colonne).
• La matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la matrice nulle et est notée 0.
• Si $m = n$, on parle de matrice carrée de taille n. L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la famille $(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ est appelée la diagonale de A. Les coefficients $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ sont appelés les coefficients diagonaux de A.

1.2 Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition

• Une matrice carrée A est dite matrice diagonale si ses coefficients non diagonaux sont nuls. En d'autres termes,

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0).$$

• Une matrice carrée A est dite triangulaire supérieure si ses coefficients situés au dessous de la diagonale sont nuls. En d'autres termes,

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0).$$

• Une matrice carrée A est dite triangulaire inférieure si ses coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls. En d'autres termes,

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0).$$

• On appelle matrice identité de taille n, et on note I_n, la matrice <u>diagonale</u> de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Opérations sur les matrices

Remarque : Par convention, si A (respectivement B, C,...) est une matrice de taille $m \times n$, on notera a_{ij} (respectivement b_{ij}, c_{ij},...) ses coefficients.

2.1 Somme de deux matrices

Définition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!], \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & i & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & i+1 & -i \end{pmatrix}.$$

2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $B = \lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Exemple :

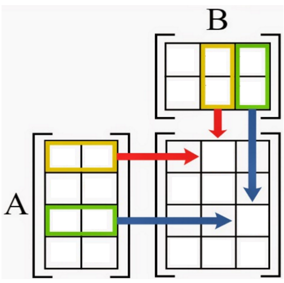
$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & 3\lambda \end{pmatrix}.$$

2.3 Produit de deux matrices

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$



Par exemple, sur la figure ci-dessus, $\boxed{c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}}$ et $\boxed{c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}}$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 31 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \\ 6 & 12 & -6 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Proposition: Propriétés du produit matriciel

- **Associativité** : pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$$(AB)C = A(BC).$$

- **Bilinéarité** : pour $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$(\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC \quad \text{et} \quad A(\alpha C + \beta D) = \alpha AC + \beta AD$$

- **Élément neutre** : pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a :

$$AI_n = A \quad \text{et} \quad I_m A = A.$$

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AI_n = I_n A = A$.

Remarques.

- Le produit matriciel AB existe si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. La matrice AB possède alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B. Autrement dit,

$$\boxed{\text{matrice } m \times n} \times \boxed{\text{matrice } n \times p} = \boxed{\text{matrice } m \times p}.$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 = I_n$, et si $p \in \mathbb{N}^*$, on note A^p la matrice $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.
- Le produit matriciel **n'est pas commutatif**. Il se peut que AB existe sans que BA existe. Même si AB et BA existent, on **n'a pas** en général $AB = BA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Un produit de deux matrices non nulles peut être nul. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition: Formule du binôme

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

2.4 Matrices nilpotentes

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $A^3 = 0$.

2.5 Transposition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

La transposée de A est notée ${}^{\mathrm{t}}A$ ou aussi A^{T}.

Explication : lorsqu'on transpose une matrice A, les lignes deviennent les colonnes et inversement. Si A possède m lignes et n colonnes, sa transposée possède alors n lignes et m colonnes.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition: Propriétés de la transposition

- **Linéarité** : pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ${}^{\mathrm{t}}(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^{\mathrm{t}}A + \beta\, {}^{\mathrm{t}}B$.
- **Involutivité** : pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) = A$.
- **Produit** : pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\, {}^{\mathrm{t}}A$.

2.6 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$. Autrement dit : $\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad a_{ij} = a_{ji}$.
• On dit que A est antisymétrique si ${}^tA = -A$. Autrement dit : $\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad a_{ij} = -a_{ji}$.

Remarque. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

2.7 Trace d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A. Autrement dit,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition: Propriétés de la trace

• **Linéarité** : pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\ \mathrm{tr}(A) + \beta\ \mathrm{tr}(B)$.
• **Produit** : pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Avec des propriétés vues précédemment, on peut aisément vérifier que :

Théorème

Muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire, l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3.1 Base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Définition

• Pour $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$, on note E_{ij} la matrice de taille $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Les E_{ij} sont appelées matrices élémentaires.
• La famille $(E_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, appelée sa base canonique. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est donc de de dimension mn.

Exemple : Les six matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ sont

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des E_{ij} :

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{31}E_{31} + a_{32}E_{32} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}E_{ij}.$$

4 L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Avec des propriétés vues précédemment, on peut aisément vérifier que :

Théorème

Muni de l'addition et du produit des matrices, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une structure d'anneau.
Pour $n > 1$, l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est ni commutatif ni intègre.

5 Matrices inversibles

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Cette matrice B, si elle existe, est unique ; elle est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Remarques :
- L'inversibilité des matrices est à comprendre au sens de l'inversibilité dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'inversibilité n'a de sens que pour les matrices carrées.
- On va voir qu'il suffit d'avoir seulement $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ pour affirmer que A est inversible d'inverse B.

Définition

On appelle groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$, et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition: Opérations sur les matrices inversibles

Soient A et B deux matrices inversibles, on a :
- A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, notée A^{-k}.
- ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Remarque : Les trois premières propriétés sont des propriétés (déjà vues) des éléments inversibles dans n'importe quel magma associatif possédant un élément neutre, ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel.

6 Systèmes linéaires

6.1 Écriture matricielle

Tout système linéaire de m équations à n inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

peut être écrit sous forme matricielle $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}.$$

La matrice A s'appelle la matrice du système, B s'appelle le second membre du système.
Si $B = 0$, on dit que le système est homogène.
La matrice augmentée du système est la matrice $(A|B)$, c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

6.2 Opérations élémentaires

Définition

Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$. On appelle opération élémentaire sur les lignes (ou les équations) d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice augmentée) les opérations suivantes :

- permutation de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ ligne, notée $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication de la $i^{\text{ème}}$ ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, notée : $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- addition d'un multiple de la $j^{\text{ème}}$ ligne à la $i^{\text{ème}}$ ligne (avec $i \neq j$), notée : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Si une matrice B est obtenue à partir d'une matrice A suite à une opération élémentaire, on dit que les matrices A et B sont équivalentes en lignes ou l-équivalentes.

Proposition

Une opération élémentaire sur les lignes d'un système transforme le système en un système équivalent, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions que le système initial.

6.3 Matrices échelonnées en lignes

Définition

Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie :
- — le premier terme non nul de chaque ligne se situe strictement à droite du premier terme non nul de la ligne précédente (ces termes sont appelés les pivots)
- — les lignes nulles (ne contenant que des 0), si elles existent, viennent en bas, après les lignes non nulles

Exemple : Voici trois exemples de matrices échelonnées en lignes. Les coefficients encadrés sont les pivots

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Remarque importante : Toute matrice A peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes, à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A.
Les trois matrices précédentes sont donc équivalentes en lignes.
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6.4 Rang d'une matrice

Définition

Le rang d'une matrice A, noté $\mathrm{rg}(A)$ est le nombre de lignes non nulles dans la matrice échelonnée obtenue à partir de la matrice A à l'aide d'opérations élémentaires.
Ce nombre est aussi égal :
- — au nombre de pivots dans la matrice échelonnée obtenue à partir de A
- — au nombre maximal de vecteur lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendants
- — à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes (ou colonnes) de A

6.5 Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss (ou l'algorithme du pivot) consiste à transformer, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, un système linéaire (S) en un système linéaire équivalent (S') dont la matrice augmentée est échelonnée en lignes. La résolution de (S') donne alors les solutions de (S).
Notons que lorsque le système est homogène, il est inutile d'écrire dans la matrice augmentée le second membre (qui va rester nul après n'importe quelle opération élémentaire).

Proposition

On considère un système linéaire de m équations à n inconnues. Soient A la matrice du système, B son second membre et $(A|B)$ sa matrice augmentée.

1. le système possède des solutions si et seulement si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B)$
2. lorsqu'elles existent, les solutions dépendent de $n - \text{rg}(A)$ paramètres indépendants.

6.6 Exemples de résolution de systèmes linéaires

Exemple 1 : Soit à résoudre le système linéaire suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & -5 \\ -x & - & 3y & - & 9z & = & -5 \end{array}\right.$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On échelonne la matrice augmentée du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le système initial est alors équivalent au système plus simple suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & -1 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Ce système se résout de proche en proche, en commençant par z, puis y, puis x :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & -1 \\ y & = & 1 - 3z = 4 \\ x & = & -1 - y - 7z = 2 \end{array}\right.$$

Il y a donc une <u>solution unique</u> qui est $(x, y, z) = (2, 4, -1)$.

Remarque : Dans l'exemple précédent, on remarque de $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$ et qu'il y a une solution unique (les solutions ne dépendent d'aucun paramètre).

Exemple 2 : Soit à résoudre le système linéaire suivant de 3 équations à 4 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & & & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & & & = & 3 \\ & & 7y & - & 5z & + & 5t & = & -1 \end{array}\right.$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On échelonne la matrice augmentée du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Le système initial est alors équivalent au système plus simple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & & & = & -1 \\ & & 7y & - & 6z & & & = & 5 \\ & & & & z & + & 5t & = & -6 \end{array} \right.$$

Ce système se résout de proche en proche, en commençant par z, puis y, puis x, en fonction de t :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -6 - 5t \\ y & = & \frac{1}{7}(5 + 6z) = -\frac{1}{7}(31 + 30t) \\ x & = & -1 + 3y - 2z = -1 - \frac{3}{7}(31 + 30t) + 2(6 + 5t) = -\frac{4}{7}(4 + 5t) \end{array} \right.$$

Le système initial possède alors une infinité de solutions, qui sont tous les quadruplets (x, y, z, t) qui s'écrivent

$$(x, y, z, t) = \left(-6 - 5t, -\frac{1}{7}(31 + 30t), -\frac{4}{7}(4 + 5t), t \right)$$

où t a une valeur arbitraire.

Remarque : Dans l'exemple précédent, on remarque de $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$ et que les solutions dépendent de $4 - 3 = 1$ paramètre.

Exemple 3 : Soit à résoudre le système linéaire suivant de 3 équations à 3 inconnues

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 4 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 2 \end{array} \right.$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On échelonne la matrice augmentée du système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne de la matrice obtenue donne l'équation $0x + 0y + 0z = -5$ qui n'a pas de solution. Le système est donc impossible.

Remarque : Dans l'exemple précédent, on remarque de $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A|B) = 3$.