



Cycle préparatoire 2^{ème} année

Examen de fin de semestre

Matière : Algèbre linéaire et bilinéaire

Date : Lundi 10 juin 2019

Appareils électroniques et documents interdits

Durée : 3 heures

Nombre de pages : 3

*Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème (sur 35) est donné à titre indicatif.*

Traiter au choix un exercice et un seul parmi les exercices 4 et 5

Exercice 1. (12 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle commutant de A , noté $\mathcal{C}(A)$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A ; autrement dit

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$

Partie I : Généralités

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(P^{-1}AP).$$

- (b) Montrer alors que l'application $\varphi : \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(P^{-1}AP)$ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie II : Étude d'un exemple

Le but de cette partie est d'utiliser la réduction d'une matrice pour décrire son commutant.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AX . Que peut-on en déduire?
2. Calculer les valeurs propres de A et déterminer leur multiplicité.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice T de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

telles que $A = PTP^{-1}$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

4. Montrer que $\mathcal{C}(T)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
5. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(A)$.
6. Montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{vect}(I_3, A, A^2)$.

Exercice 2. (11 points)

Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge.

1. (a) Montrer que si f et g sont deux éléments de E , alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est absolument convergente.
- (b) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
2. À deux éléments f et g de E , on associe le réel

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt.$$

Montrer qu'on vient de définir un produit scalaire sur E .

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(t) = e^{-nt}$.
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$.
- (b) Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, calculer $\langle f_k, f_l \rangle$.
On pourra utiliser ce résultat dans les calculs qui suivront.
4. Soit $F = \text{vect}(f_1, f_2)$.
- (a) Déterminer une base orthonormale de F .
- (b) Déterminer $p_F(f_3)$, la projection orthogonale de f_3 sur F .
- (c) Soit l'ensemble

$$E = \left\{ \int_0^{+\infty} (e^{-3t} - ae^{-t} - be^{-2t})^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- i. Justifier que E possède une borne inférieure.
- ii. En quel point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ cette borne inférieure est-elle atteinte? Justifier.

Exercice 3. (5 points)

On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire canonique et on considère le sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^3 donné par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}.$$

On note p_F la projection orthogonale sur F et p_{F^\perp} la projection orthogonale sur F^\perp .

1. Déterminer une base de F^\perp .
2. Soit $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p_F(X)$.
3. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. En déduire la matrice de p_{F^\perp} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Traiter au choix un exercice et un seul parmi les deux exercices suivants

Aucun point ne sera accordé si les deux exercices sont traités à la fois

Exercice 4. (7 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

On considère un endomorphisme f de E vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Un tel endomorphisme s'appelle *endomorphisme orthogonal*.

1. Montrer que f conserve la norme, c.-à-d. $\forall x \in E, \| f(x) \| = \| x \|$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E et que sa bijection réciproque f^{-1} est un endomorphisme orthogonal de E .
3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E .
4. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de f , alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.
5. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que g est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{R}^3 .

Exercice 5. (7 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A, B) \in E \times E, \varphi(A, B) = \text{tr}(A {}^t B)$$

où tr désigne la trace et ${}^t B$ désigne la matrice transposée de B , notée aussi B^T .

Soit \mathcal{S} (respectivement \mathcal{A}) le sous-espace des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de E .

On note $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la famille des matrices élémentaires de E , c.-à-d. E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne et qui vaut 1.

1. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E .
2. Montrer que $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ (c.-à-d. que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont supplémentaires orthogonaux dans E).
3. On note H l'ensemble des matrices diagonales de E .
 - (a) Déterminer une base et la dimension de H .
 - (b) Soit $A \in E$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Calculer $\varphi(A, E_{ii})$ en fonction des coefficients a_{ij} de A .
 - (c) Donner une base et la dimension de H^\perp .