EISTI	Cycle préparatoire 2ème année Examen de fin de semestre	
	Matière : **Algèbre linéaire et bilinéaire**	*Date* : **Lundi 18 juin 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **3 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (8 points) *Racines carrées d'une matrice dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle racine carrée de A toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Le but de cet exercice est de trouver toutes les racines carrées de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que B est une racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}BP$ est une racine carrée de D.
2. Soit S une racine carrée de D.
   (a) Montrer que $SD = DS$.
   (b) En déduire que S est diagonale. On note s_1, s_2, s_3 les coefficients diagonaux de S.
   (c) Pour $i \in \{1,2,3\}$, que vaut s_i^2 ?
   (d) En déduire toutes les matrices S possibles.
3. En utilisant les résultats des questions 1) et 2), donner toutes les racines carrées de la matrice A.
   On se contentera de donner chaque racine carrée de A sous forme d'un produit de matrices faisant intervenir P et P^{-1}, sans la calculer explicitement.
4. Déterminer, en le justifiant, le nombre de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on ne demande pas de les calculer) des matrices M et N vérifiant :
   (a) $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 0, 1\}$.
   (b) $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(N) = \{1, 2, 4\}$.

Exercice 2. (4 points)
Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$$
où ${}^tA$ désigne la transposée de A (qu'on note aussi A^T), ${}^tAB$ désigne ${}^tA \times B$ et tr désigne la trace.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$(\mathrm{tr}(A))^2 \leq n\ \mathrm{tr}(A^2).$$

Exercice 3. (4 points)
Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$.
On considère sur E le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :
$$\forall (f, g) \in E^2,\quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\mathrm{d}t.$$

1. Soit $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f = f''\}$.
   (a) Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer que V et W sont orthogonaux.
2. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'application $h_{\alpha,\beta} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$h_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\beta \mathrm{sh}(t) + \alpha \mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)}$$
   où sh désigne la fonction sinus hyperbolique : $\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $h_{\alpha,\beta} \in W$.
   (b) Pour $f \in E$, à quelles conditions sur f a-t-on $f - h_{\alpha,\beta} \in V$?
   (c) En déduire que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 4. (4 points)
Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, on pose
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0) = 0\}$ et $Q = X^2 + X + 1$. Calculer $p_F(Q)$ et en déduire $d(Q, F)$.