

Notes de cours

**RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES : COMPLÉMENTS
ET APPLICATIONS****Table des matières**

1	Polynômes d'endomorphisme et de matrice carrée	2
2	Polynôme annulateur	3
3	Polynôme minimal	3
4	Applications à la réduction des endomorphismes	4
4.1	Calcul des puissances d'une matrice carrée	4
4.2	Calcul de l'inverse d'une matrice carrée	5

1 Polynômes d'endomorphisme et de matrice carrée

Définition: Polynôme d'endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit l'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par

$$P(f) = \sum_{k=0}^m a_k f^k.$$

(où $f^0 = \text{id}_E$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f^{k-1} \circ f$)

Exemple : Si $P(X) = 2 - 5X + 3X^2$, alors $P(f) = 2 \text{id}_E - 5f + 3f^2$.

Définition: Polynôme de matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit la matrice carrée $P(A)$ d'ordre n par

$$P(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k.$$

Exemple : Si $P(X) = 1 + 2X - X^3$, alors $P(A) = I_n + 2A - A^3$.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans \mathcal{B} . La matrice de l'endomorphisme $P(f)$ dans \mathcal{B} est alors $P(A)$.
Autrement dit,

$$M_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(M_{\mathcal{B}}(f)).$$

Exemple :

Si $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, alors $M_{\mathcal{B}}(6 \text{id}_E + 3f^2 - f^5) = 6I_n + 3A^2 - A^5$.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a :

1. $(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$
2. $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$
3. $1(f) = \text{id}_E$

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et $x \in E_{\lambda}(f)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(f)(x) = P(\lambda) \cdot x.$$

Autrement dit, si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ , alors x est un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Version matricielle : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \in E_{\lambda}(A)$. Pour tout polynôme

$P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(A)X = P(\lambda)X.$$

2 Polynôme annulateur

Définition: Polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A)$ est la matrice nulle.

Exemples :

1. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 donné par $f(x, y) = (x, 0)$.

2. $X^4 + 4$ est un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque :

Un polynôme annulateur n'est pas unique. Par exemple, si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme (ou d'une matrice), alors tout multiple de P l'est aussi.

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

Si P un polynôme annulateur de f , alors λ est une racine de P .

Version matricielle : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Si P est un polynôme annulateur de A , alors λ est une racine de P .

Théorème: Cayley-Hamilton

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique P_f de f est un polynôme annulateur de f :

$$P_f(f) = 0.$$

Version matricielle : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique P_A de A est un polynôme annulateur de A :

$$P_A(A) = 0.$$

3 Polynôme minimal

Définition: Polynôme minimal

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique polynôme unitaire $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ de degré minimal tel que $\mu_f(f) = 0$. Ce polynôme est appelé le polynôme minimal de f .

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Tout polynôme annulateur de f est un multiple de μ_f .
2. L'ensemble des racines de μ_f est $\text{Sp}(f)$.

Corollaire: Forme du polynôme minimal

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f , et m_1, \dots, m_p leurs multiplicités respectives. Le polynôme minimal μ_f de f est de la forme

$$\mu_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{r_k}$$

avec pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $r_k \in \llbracket 1, m_k \rrbracket$.

Exemple :

Déterminer le polynôme minimal des matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1. f est trigonalisable sur \mathbb{K} si et seulement si μ_f est scindé sur \mathbb{K} .
2. f est diagonalisable sur \mathbb{K} si et seulement si μ_f est scindé sur \mathbb{K} et toutes ses racines sont simples.

4 Applications à la réduction des endomorphismes

4.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable et si (P, T) est une trigonalisation de A ($A = PTP^{-1}$), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^k P^{-1}$.

Si de plus A est inversible, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $A^k = PT^k P^{-1}$.

Remarque :

Cette méthode est particulièrement utile lorsque la matrice T est diagonale (donc la matrice A est diagonalisable). Dans ce cas, le calcul des puissances de T est immédiat.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A . Soit $k \in \mathbb{N}$ et R le reste de la division euclidienne de X^k par P . On a alors $A^k = R(A)$.

Remarques :

1. Cette proposition est souvent utilisée avec le polynôme caractéristique ou le polynôme minimal de A (qui sont des polynômes annulateurs de A).

2. Toute puissance de A est donc combinaison de $I_n, A, A^2, \dots, A^{\deg(P)-1}$. La méthode est donc d'autant plus efficace que le degré de P est petit. Le choix optimal est donc pour $P =$ le polynôme minimal de A .
3. Cette méthode convient même lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4.2 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_mX^m$ un polynôme annulateur de A . On a alors $a_0I_n = -A(a_1I_n + a_2A + \dots + a_mA^{m-1})$. De plus, si $a_0 \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1I_n + a_2A + \dots + a_mA^{m-1}).$$