karam.fayad@eisti.eu

Algèbre linéaire et bilinéaire
TD 1B - Réduction des endomorphismes

Exercice 1 . Trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 .

1. Déterminer l'ensemble Ω des réels a tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a^2 & 2a^2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   n'est pas diagonalisable.
2. Pour $a \in \Omega$, trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 3 . Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & 0 & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que $\mathcal{B}' = \{f^2(e_3), f(e_3), e_3\}$ est une base de E et donner la matrice T de f dans catte base.
3. En déduire une trigonalisation de A.

Exercice 4 . Calculer A^n pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 . Réduire la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$