
Algèbre linéaire et bilinéaire
TD 2 - Réduction des endomorphismes : Compléments et applications

Exercice 1 . Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) = \{-2, 1, 3\}$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I_3 .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de A^2 , A et I_3 .

Exercice 2 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, u un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et tel que $P(u) = 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.
2. En déduire que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 3 . Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{id}_E$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?
2. Donner les polynômes caractéristiques possibles de f lorsque $n = 2, n = 3, \dots$.
3. Montrer que, dans tous les cas,

$$E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j^2\text{id}_E).$$

4. En déduire les matrices solutions de $M^3 = I_n$.

Exercice 4 .

1. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant

$$\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \\ f^8 + 16f^4 = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est l'endomorphisme nul.

Exercice 5 . Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$, et les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = v_n \end{cases}$$

avec u_0 et v_0 fixés.

1. Calculer u_n et v_n en fonction de n .
2. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par la donnée de leur premier terme u_0, v_0, w_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5v_n + 6w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 9v_n - 12w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 7v_n + 9w_n \end{cases}$$

Donner une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Résoudre le système différentiel suivant, où y_1, y_2, y_3 sont trois fonctions de la variable réelle x .

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - y_3 + x + 1 \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 - 4y_3 + 4x + 1 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 - 2y_3 + 2x + 1 \end{cases}$$

Exercice 8. y_1, y_2, y_3 étant trois fonctions numériques de la variable réelle x , on considère le système différentiel suivant :

$$(S) \begin{cases} y_1' = -6y_1 + 5y_2 + 3y_3 + e^{-x} \\ y_2' = -8y_1 + 7y_2 + 4y_3 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + y_3 + 2e^{-x} \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous forme matricielle.
2. Soit A la matrice du système. Montrer que A est trigonalisable et semblable à une matrice T de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et déterminer α et β .

3. Résoudre (S) .