Algèbre linéaire et bilinéaire
TD 0 - Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 . Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2)$ et $u_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 2 . Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(-1) = 0\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. En déterminer une base et la dimension.

Exercice 3 . On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ des réels tel que $a_1 < \cdots < a_n$. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on considère l'application $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_i(x) = e^{a_i x}$.

1. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Exercice 4 . Résoudre, par l'algorithme de Gauss, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 2 \\ 4x + 5y + 6z &= 4 \\ 7x + 8y + 9z &= a \end{cases}$$

On discutera suivant les valeurs de a.

Exercice 5 . On considère l'endomorphisme U de $\mathbb{R}_3[X]$, défini par

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_3[X], \quad U(P) = P + P'.$$

Écrire la matrice de U relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. U est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 6 . Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ -5 & 5 & 2 & -10 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f. Donner les bases ainsi que la dimension de ces espaces.
2. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
3. A-t-on $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$?

Exercice 7 . Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x).$$

Trouver la matrice de f dans la base $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

Exercice 8 . Pour $m \in \mathbb{R}$, déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 . Calculer les déterminants suivants, où a, b, c et d sont des réels.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 10 . Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par

$$f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercices d'entraînement

À faire chez soi

Exercice 11 . Soit dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + 2y + z = 0\}.$$

Déterminer une base et la dimension de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 12 . Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $a = (2, 3, -1),\ b = (1, -1, -2),\ c = (3, 7, 0),\ d = (5, 0, -7)$.
Montrer que $\mathrm{vect}(a, b) = \mathrm{vect}(c, d)$.

Exercice 13 . Déterminer le rang des matrices suivantes (où $m \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 . Résoudre le système linéaire suivant (où $m \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m + 1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m - 1 \end{cases}$$

Exercice 15 . Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 16 . Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 17 . Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensoion 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit θ un réel et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f^3 = 0$.
2. Soit $e'_1 = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta,\ e'_2 = f(e_1)$ et $e'_3 = f(e_2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (b) En déduire la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.