karam.fayad@eisti.eu

Notes de cours

Rappels d'algèbre linéaire

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

Définition: Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un ensemble E muni :

- d'une loi de composition interne (appelée addition) notée $+$, telle que $(E, +)$ est un groupe abélien, c.à-d. :
  1. la loi $+$ est associative
  2. la loi $+$ possède un élément neutre, noté 0_E ou 0
  3. tout élément x de E est inversible pour la loi $+$, d'inverse noté $-x$
  4. la loi $+$ est commutative
- d'une application (dite aussi loi de composition externe)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \quad \text{(souvent noté } \lambda x\text{)} \end{array}$$

  telle que, pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
  1. $1 \cdot x = x$
  2. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
  3. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  4. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Exemples :

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{K}$).
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pour l'addition des complexes et la multiplication d'un complexe par un réel).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour les lois $+$ et $\cdot$ définies par :
   $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$
   $\lambda \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$
4. Soit X un ensemble. L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur X à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ définies par :
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in X$
   $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in E$
5. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des polynômes et la multiplication des polynômes par un scalaire.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, on a :

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
2. $0 \cdot x = 0_E$
3. $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
4. $\lambda \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

2 Sous-espaces vectoriels

Définition: Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

— F est stable par addition : $\forall\ (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$

— F est stable par la loi externe : $\forall\ (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Exemples :

1. L'ensemble $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition: Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F est un sous-espace vectoriel de E
2. $\forall\ (x,y) \in F^2,\ \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$
3. $\forall\ (x,y) \in F^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot x + y \in F$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F, muni des "lois induites" (c.à-d. les lois de E) est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques :

1. Tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent au moins le vecteur nul 0_E.
2. Pour montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E, on n'oubliera pas la condition $F \neq \emptyset$. On peut vérifier par exemple que le vecteur nul 0_E appartient à F.
3. Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est plus simple de montrer, si possible, que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

3 Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition: Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, F_2, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On note $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i = F_1 + \cdots + F_p$ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ s'écrivant sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ avec pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in F_i$. Autrement dit :

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}.$$

Théorème-Définition: Somme directe de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, F_2, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\ x \in F_1 + \cdots + F_p,\ \exists!\ (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p$
2. $\forall\ (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ (x_1 + \cdots + x_p = 0\ \Rightarrow\ x_1 = \cdots = x_p = 0)$
3. $\forall\ i \in [\![1, p]\!],\ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe, et la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou aussi $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Exemple :
Dans $\mathbb{R}^2$, les sous-ensembles $\{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\}$ sont deux-sous espaces vectoriels en somme directe.

4 Familles génératrices - Familles libres - Bases

Définition: Combinaison linéaire

Une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ est dite à support fini si tous les λ_i sont nuls sauf un nombre fini. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires à support fini.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Un vecteur x de E est appelée combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Les λ_i sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarques :

1. Même si l'ensemble I est éventuellement infini, la somme précédente ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls, car la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est à support fini.
2. Les coefficients d'une combinaison linéaire ne sont pas forcément uniques. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(1, 2)$ s'écrit de plusieurs façons comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1), (1, 0)$ et $(1, -1)$:

$$(1, 2) = 2 \cdot (1, 1) - 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, -1) = 3 \cdot (1, 1) - 3 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, -1).$$

Définition: Sous-espace vectoriel engendré

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$, noté $\mathrm{vect}((x_i)_{i \in I})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i \in I}$. Autrement dit :

$$\mathrm{vect}((x_i)_{i \in I}) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, alors $\text{vect}((x_i)_{i\in I})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Définition: Famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice de E (ou engendre E) si

$$E = \text{vect}((x_i)_{\in I}).$$

Autrement dit, tout vecteur de E s'écrit (d'au moins une manière) comme combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Exemple :

1. La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$.
2. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$.

Définition: Famille libre/Famille liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite libre si la seule combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ égale au vecteur 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls.
Autrement dit, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$, on a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \ \Rightarrow \ \forall\ i \in I,\ \lambda_i = 0.$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs x_i sont linéairement indépendants.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite liée si elle n'est pas libre, c.-à-d. s'il existe une combinaison linéaire nulle de la famille $(x_i)_{i\in I}$ à coefficients non tous nuls.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs x_i sont linéairement dépendants.

Remarques :

1. Une famille réduite à un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
2. On travaillera souvent avec des familles finies de vecteurs, c.-à-d. l'ensemble d'indices I est fini. En partliculier, une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ est finie, donc on n'a pas besoin de dire "à support fini".

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est libre.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est libre.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,-1),(2,1,1),(5,1,-2))$ est liée.
   En effet : $3\cdot(1,0,-1)+(2,1,1)-(5,1,-2)=0$.

Définition: Base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est appelée une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemples :

1. La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
2. De façon plus générale, la famille $((1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
3. La famille infinie $(1,X,X^2,\cdots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, dite base canonique.
4. La famille $(1,X,X^2,\cdots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, dite base canonique.

Proposition: Caractérisation d'une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire de cette famille. Autrement dit :

$$\forall\ x\in E,\ \exists!\ (\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)},\ x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i.$$

Espaces vectoriels de dimension finie

Définition

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Théorème-Définition: Dimension

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet au moins une base.
Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs : cet entier commun est appelé la dimension de E et est noté $\dim\ E$.
On a : $\dim\{0_E\}=0$.

Exemples :

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
3. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On a alors : $\dim\ F\leq\dim\ E$.
De plus, $\dim\ F=\dim\ E$ si et seulement si $F=E$.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a alors :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

En particulier : $\dim(F\oplus G)=\dim(F)+\dim(G)$.

Théorème: Base extraite/Base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Base extraite : De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base.
En particulier, toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.

Base incomplète : Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
En particulier, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs de E. On a les équivalences :

$$\mathcal{B} \text{ est libre } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est génératrice dans E } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

Théorème: Base adaptée à une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E qui sont en somme directe. Si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i, alors le recollement des bases $\mathcal{B}_i$ est une base de $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Il en résulte en particulier que

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

5 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition: Rang d'une famille finie de vecteurs

On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$, noté $\mathrm{rg}(u_1, \cdots, u_n)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs. Autrement dit :

$$\mathrm{rg}(u_1, \cdots, u_n) = \dim(\mathrm{vect}(u_1, \cdots, u_n)).$$

Proposition

Le rang d'une famille finie de vecteurs est égal au nombre maximal de vecteurs que peut contenir une sous-famille libre de cette famille.
En particulier, une famille finie de vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qui la composent.

Remarques :
Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

1. Comme $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $vect(\mathcal{F})$, on peut en extraire une base de $vect(\mathcal{F})$. Parsuite $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq n$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
2. Si $\mathcal{F}$ contient r vecteurs linéairement indépendants, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \geq r$, avec égalité si et seulement si ces r vecteurs engendrent $vect(\mathcal{F})$.

6 Applications linéaires

Définition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

— $f(x + y) = f(x) + f(y)$

— $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Remarque :
Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a $f(0_E) = 0_F$.

Proposition: Caractérisation d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est linéaire
2. $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$
3. $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$

Exemples :

1. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, x - y + z) \end{array}$$
est linéaire.
2. Soit $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$
est linéaire.
3. L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$
est linéaire.

Définition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.

— Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.

— Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif d E.

— Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Remarque :
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

7 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

On rappelle que si f est une application de E dans F, et si $E' \subset E$ et $F' \subset F$:

— l'image directe de E' par f est

$$f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\}.$$

— l'image réciproque de F' par f est

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}.$$

Proposition: Image directe d'un sous-espace vectoriel

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

Cas particulier (Image d'une application linéaire) :
$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f et noté $\mathrm{Im}(f)$.
Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(f)$ l'est aussi, et on définit le rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, comme étant la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition: Image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Cas particulier (Noyau d'une application linéaire) :
$f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le noyau de f et noté $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition: Caractérisation de l'injectivité

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a l'équivalence :

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Théorème: Théorème du rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}\ f).$$

Corollaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même</u> dimension (finie) et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a les équivalences :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

8 Représentation matricielle des applications linéaires

Définition: Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $X = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
La matrice de la famille X dans la base $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(X)$ est la matrice à n lignes et p colonnes dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est la colonne des composantes du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.
Autrement dit, c'est la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ telle que

$$\forall\, j \in [\![1, p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Exemple :
La matrice de la famille $((1,1,0),(2,1,-3),(1,0,0),(2,4,2))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une famille libre
2. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E
3. $\mathcal{F}$ est une base de E
4. $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible
5. $\det(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) \neq 0$
6. $\mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = n$

Exemple :
La famille de 3 polynômes $(1 + 2X - X^2, X^2, 2 + X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ car sa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est inversible.

Définition: Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de F.
La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice de la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

Autrement dit, c'est la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ telle que

$$\forall\, j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i.$$

Remarque : Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, alors $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ se note $M_{\mathcal{B}}(f)$.
Exemple :
La matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est la matrice A.

Exemple : Soit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(1,0) = (1,2,0) \quad , \quad f(0,1) = (0,1,-1).$$

Théorème: Image d'un vecteur

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. On a alors :

$$M_{\mathcal{C}}(f(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(x).$$

Définition: Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
De façon équivalente, c'est la matrice de l'application identité Id_E de E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Théorème: Formule de changement de bases

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
On pose : $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'},\ Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'},\ A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$.
On a alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Corollaire: Cas particulier important

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On pose : $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$.
On a alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$