

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Table des matières

1.1	Système homogène - Cas où A est diagonalisable	3
1.2	Système homogène - Cas où A est trigonalisable	5
1.3	Système avec second membre	7
1.3.1	Comment déterminer une solution particulière?	7
1.4	Exponentielle d'une matrice	9
1.4.1	Calcul de l'exponentielle d'une matrice dans quelques cas particuliers	10

Définition 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un système différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre 1 à n équations prend la forme

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où X et B sont des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la variable réelle t , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice indépendante de t .

- $X(t)$ est l'inconnue.
- $B(t)$ est le second membre du système. Si $B(t) = 0$, on dit que le système est homogène.
- A est la matrice du système.

Pour alléger les notations, on pourra noter $X' = AX + B$, sans oublier que X et B sont des fonctions de la variable réelle t à valeurs dans \mathbb{R}^n .

1.1 Système homogène - Cas où A est diagonalisable**Théorème 1.2**

Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (éventuellement avec répétition), et (v_1, \dots, v_n) une base de vecteurs propres, associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ sur un intervalle quelconque I est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Une base est la famille formée par les n fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ données par

$$t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$$

pour $i = 1, \dots, n$. La solution générale du système est donc

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si de plus la condition initiale $X(0)$ est fixée, la solution est unique.

Démonstration. Vérifions d'abord que l'ensemble des solutions est un \mathbb{R} -espace vectoriel. De façon équivalente, vérifions que c'est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. La fonction nulle est clairement une solution. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et X_1 et X_2 sont deux solutions de $X' = AX$, alors

$$(\lambda X_1 + X_2)' = \lambda X_1' + X_2' = \lambda AX_1 + AX_2 = A(\lambda X_1 + X_2)$$

ainsi $\lambda X_1 + X_2$ est également solution.

Trouvons maintenant une base de cet espace vectoriel.

Diagonalisons la matrice A . En notant P la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est formée par les coordonnées de v_i dans la base canonique de \mathbb{R}^n , on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On pose

$$Y = P^{-1}X$$

ainsi $Y' = P^{-1}X'$, $X = PY$ et $X' = PY'$. Avec ces notations, on a :

$$X' = AX \Leftrightarrow PY' = APY \Leftrightarrow Y' = P^{-1}APY \Leftrightarrow Y' = DY$$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, le système $Y' = DY$ donne

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On déduit que

$$X(t) = PY(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

Ainsi la famille formée par les n fonctions $X_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ données par $t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$ engendre l'espace des solutions.

De plus, cette famille est libre. En effet, soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = 0,$$

alors $\forall t \in I$,

$$a_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} v_n = 0.$$

En appliquant l'égalité précédente pour un t fixé, et en utilisant le fait que la famille (v_1, \dots, v_n) est libre, on conclut que $\forall i = 1, \dots, n$, $a_i e^{\lambda_i t} = 0$, ainsi $\forall i = 1, \dots, n$, $a_i = 0$.

Ainsi la famille (X_1, \dots, X_n) est une base de l'espace des solutions. Une base de l'espace des solutions est appelée *système fondamental de solutions*. \square

Remarque : Avec cette méthode, il est inutile de calculer P^{-1} .

Exemple : Soit à résoudre le système différentiel suivant, où x_1, x_2 et x_3 sont trois fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

En notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le système différentiel précédent s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

On a $\text{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$ et

$$E_{-1}(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_0(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, le système $X' = AX$ devient équivalent à $Y' = DY$.

Autrement dit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 e^{-t} \\ y_2(t) = \alpha_2 e^{2t} \\ y_3(t) = \alpha_3 \end{cases}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. La solution générale du système différentiel $X' = AX$ est alors

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = y_1(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y_3(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$X(t) = \alpha_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Écrit autrement :

$$\begin{cases} x_1(t) = -\alpha_1 e^{-t} + 2\alpha_2 e^{2t} \\ x_2(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 \\ x_3(t) = 3\alpha_2 e^{2t} - \alpha_3 \end{cases}$$

1.2 Système homogène - Cas où A est trigonalisable

Soit à résoudre le système différentiel homogène $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable sur \mathbb{R} .

En trigonalisant A , on obtient $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure. Comme précédemment, on pose $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX$ devient équivalent à $Y' = TY$. On résout le système obtenu de proche en proche, en commençant par la dernière équation différentielle.

Exemple : Soit à résoudre le système différentiel suivant, où x_1, x_2 et x_3 sont trois fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 10x_1 - 5x_2(t) + 7x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

En notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, le système différentiel précédent s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

On a $\text{Sp}(A) = \{-1, 0\}$ avec -1 une valeur propre simple et 0 une valeur propre double. Les sous-espaces caractéristiques associés respectivement sont

$$N_{-1}(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad N_0(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, le système $X' = AX$ devient équivalent à $Y' = TY$.

Autrement dit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $y_3(t) = \alpha_3$. Ensuite la deuxième équation donne $y_2(t) = \alpha_3 t + \alpha_2$, et la première donne $y_1(t) = \alpha_1 e^{-t}$, avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. On obtient

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = y_1(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (\alpha_3 t + \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Autrement dit, les trois fonctions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment un système fondamental de solutions du système $X' = AX$.

1.3 Système avec second membre

Soit à résoudre le système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. À ce système, on associe le système homogène

$$(H) : X'(t) = AX(t)$$

Proposition 1.3

Notons $X_P(t)$ une solution particulière du système $X'(t) = AX(t) + B(t)$. L'ensemble des solutions de $X'(t) = AX(t) + B(t)$ est alors

$$\{X_H(t) + X_P(t), X_H(t) \text{ est solution de } (H)\}.$$

Autrement dit, la solution générale du système $X'(t) = AX(t) + B(t)$ est la somme d'une solution particulière de ce système et de la solution générale du système homogène associé.

Démonstration. Montrons d'abord que $X_H(t) + X_P(t)$ est solution :

$$(X_H(t) + X_P(t))' = X_H'(t) + X_P'(t) = AX_H(t) + AX_P(t) + B(t) = A(X_H(t) + X_P(t)) + B(t).$$

Réciproquement, soit $X(t)$ solution, alors :

$$(X(t) - X_P(t))' = X'(t) - X_P'(t) = (AX(t) + B(t)) - (AX_P(t) + B(t)) = A(X(t) - X_P(t)).$$

Autrement dit, $X(t) - X_P(t)$ est solution de (H) , notons-là $X_H(t)$. Ainsi, $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$. \square

1.3.1 Comment déterminer une solution particulière ?

On détermine une solution particulière du système $X'(t) = AX(t) + B(t)$ en utilisant la méthode de la variation des constantes :

soit $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ une base de l'espace des solutions du système homogène (H) associé. On cherche alors une solution de $X'(t) = AX(t) + B(t)$ de la forme

$$X(t) = \alpha_1(t)X_1(t) + \dots + \alpha_n(t)X_n(t)$$

où les α_i sont des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En reportant $X(t) = \alpha_1(t)X_1(t) + \dots + \alpha_n(t)X_n(t)$ dans l'équation $X'(t) = AX(t) + B(t)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)X_i(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)X_i'(t) = B(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)AX_i(t)$$

or $AX_i(t) = X_i'(t)$. Après simplification, on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)X_i(t) = B(t).$$

Ceci est un système linéaire (pas différentiel) en les $\alpha'_i(t)$. Sa résolution donne les $\alpha'_i(t)$, puis en primitivant chaque $\alpha'_i(t)$, on détermine un $\alpha_i(t)$ (en choisissant une primitive quelconque).

Exemple : Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + \text{ch}(t) \\ x'_2(t) = 3x_2(t) + \cos(t) \end{cases}$$

Notons qu'ici, la deuxième équation est une équation différentielle en la fonction x_2 , qu'on peut résoudre séparément puis l'injecter dans la première équation.

On va cependant utiliser la méthode générale présentée précédemment.

Le système donné s'écrit matriciellement sous la forme

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

On commence par résoudre le système homogène associé, soit le système $X'(t) = AX(t)$. Ici, A est diagonalisable, de valeurs propres -2 et 3 , et de sous-espaces propres engendrés respectivement par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. La solution générale du système homogène est donc

$$\begin{aligned} X_H(t) &= \alpha_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \underbrace{\alpha_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 5e^{3t} \end{pmatrix}}_{X_2(t)} \end{aligned}$$

Cherchons une solution particulière de $X'(t) = AX(t) + B(t)$ de la forme

$$X_P(t) = \alpha_1(t)X_1(t) + \alpha_2(t)X_2(t).$$

Cela donne, après simplification,

$$\alpha'_1(t)X_1(t) + \alpha'_2(t)X_2(t) = B(t)$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha'_1(t)e^{-2t} + \alpha'_2(t)e^{3t} &= \text{ch}(t) \\ 5\alpha'_2(t)e^{3t} &= \cos(t) \end{cases}$$

C'est un système linéaire en $\alpha'_1(t)$ et $\alpha'_2(t)$, qui donne

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) &= e^{2t}\text{ch}(t) - \frac{1}{5}e^{2t}\cos(t) \\ \alpha'_2(t) &= \frac{1}{5}e^{-3t}\cos(t) \end{cases}$$

En primitivant, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1(t) &= \frac{1}{6}e^{3t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{25}e^{2t}(\sin(t) + 2\cos(t)) \\ \alpha_2(t) &= \frac{1}{50}e^{-3t}(\sin(t) - 3\cos(t)) \end{cases}$$

Note : il n'est pas nécessaire ici d'ajouter des constantes arbitraires, car on cherche une solution particulière.

La solution générale du système $X'(t) = AX(t) + B(t)$ est donc

$$\begin{aligned} X(t) &= X_H(t) + X_P(t) \\ &= \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \alpha_1(t) X_1(t) + \alpha_2(t) X_2(t) \end{aligned}$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Cela donne

$$\begin{cases} x_1(t) &= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{50}(\sin(t) + 7\cos(t)) \\ x_2(t) &= 5\alpha_2 e^{3t} + \frac{1}{10}(\sin(t) - 3\cos(t)) \end{cases}$$

1.4 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit l'exponentielle de A , notée e^A ou $\exp(A)$, par

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Remarque : La somme infinie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ a un sens, grâce au fait que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ est normalement convergente sur toute partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 1.5: Propriétés de l'exponentielle

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. $e^0 = I_n$ et $e^{I_n} = eI_n$
2. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$
3. Si $A = P^{-1}BP$, alors $e^A = P^{-1}e^B P$
4. $e^A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
5. $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$

Le résultat suivant va nous permettre de résoudre les systèmes différentiels linéaires homogènes à l'aide de l'exponentielle de matrices :

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la fonction définie par $F(t) = e^{tA}$, alors F est dérivable sur \mathbb{R} et

$$F'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Théorème 1.6

Les solutions du système différentiel linéaire donné par $X'(t) = AX(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont données par

$$X(t) = e^{tA}X_0$$

où $X_0 = X(0)$ est un vecteur constant arbitraire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $X(t) = e^{tA}X_0$, alors $X'(t) = Ae^{tA}X_0 = AX(t)$. Ainsi $X(t)$ est solution. Réciproquement, soit $\tilde{X}(t)$ une solution, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-tA} \tilde{X}(t) \right) &= -Ae^{-tA} \tilde{X}(t) + e^{-tA} \tilde{X}'(t) \\ &= -Ae^{-tA} \tilde{X}(t) + e^{-tA} A \tilde{X}(t) \\ &= -Ae^{-tA} \tilde{X}(t) + Ae^{-tA} \tilde{X}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ainsi la fonction $t \mapsto e^{-tA} \tilde{X}(t)$ est constante, donc il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $e^{-tA} \tilde{X}(t) = X_0$, d'où $\tilde{X}(t) = e^{tA}X_0$. On remarque que X_0 n'est autre que $\tilde{X}(0)$. \square

1.4.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice dans quelques cas particuliers

1. Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale, alors $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
2. Si $A = \lambda I_n + N$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et N une matrice nilpotente avec $N^p = 0$ (où $p \in \mathbb{N}^*$), alors

$$e^A = e^{\lambda I_n + N} = e^{\lambda I_n} e^N = e^{\lambda} I_n e^N = e^{\lambda} e^N = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k.$$

3. Si A est semblable à une matrice de l'une des formes précédentes, alors le calcul de e^A se fait grâce à la formule $e^{P^{-1}BP} = P^{-1}e^BP$.

Exemple : Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' &= -15x_1 + 44x_2 \\ x_2' &= -10x_1 + 27x_2 \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont deux fonctions de la variable réelle t .

Le système s'écrit matriciellement $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -15 & 44 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonalisable, de valeurs propres 5 et 7; sa diagonalisation donne $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

La solution du système $X' = AX$ est $X = e^{tA}X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne arbitraire et

$$e^{tA} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^{5t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On obtient

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Pe^{tD}P^{-1}X_0$$

Il n'y a pas besoin de calculer P^{-1} , car comme X_0 décrit $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, il en est de même de $P^{-1}X_0$. Posons alors $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, on obtient

$$X = Pe^{tD} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\gamma e^{5t} + 2\delta e^{7t} \\ 5\gamma e^{5t} + \delta e^{7t} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la solution générale du système $X' = AX$ est

$$\begin{cases} x_1 &= 11\gamma e^{5t} + 2\delta e^{7t} \\ x_2 &= 5\gamma e^{5t} + \delta e^{7t} \end{cases}$$

avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= 2x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont des fonctions de la variable réelle t .

Le système s'écrit matriciellement sous la forme $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice A admet 2 valeur propre triple, et une trigonalisation de A donne $A = PTP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est $X = e^{tA}X_0$ où X_0 est un vecteur colonne arbitraire. Calculons maintenant la matrice e^{tA} . On a :

$$e^{tA} = e^{tPTP^{-1}} = e^{P(tT)P^{-1}} = Pe^{tT}P^{-1}$$

avec $T = 2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifiant $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^p = 0, \quad \forall p > 2$. Ainsi, comme $2tI_3$ et tN commutent, on a :

$$e^{tT} = e^{2tI_3+tN} = e^{2tI_3}e^{tN} = e^{2t}I_3e^{tN} = e^{2t}e^{tN}$$

Comme tN est une matrice nilpotente, on peut facilement calculer e^{tN} :

$$e^{tN} = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2t & t+t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$e^{tT} = e^{2t}e^{tN} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 2t & t+t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc la solution du système

$$X = e^{tA}X_0 = Pe^{tT}P^{-1}X_0$$

Comme dans l'exemple précédent, il est inutile de calculer P^{-1} car $P^{-1}X_0$ décrit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Posons

$P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned} X &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t & t+t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \begin{pmatrix} t+t^2 \\ 2t+t^2 \\ t+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Autrement dit, la solution générale du système $X' = AX$ est

$$\begin{cases} x_1 &= e^{2t}[\alpha + (2\beta + \gamma)t + \gamma t^2] \\ x_2 &= e^{2t}[\alpha + \beta + (2\beta + 2\gamma)t + \gamma t^2] \\ x_3 &= e^{2t}[\beta + \gamma + \gamma t] \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.