

EISTI



Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Algèbre-Géométrie

Compléments

Comment déterminer analytiquement l'intersection de deux plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Si les deux plans P et Q sont définis par leur équations cartésiennes :

$$P : ax + by + cz + d = 0$$

$$Q : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

on peut déterminer par le calcul leur intersection.

Les coordonnées $(x ; y ; z)$ d'un point M appartenant à $P \cap Q$ doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Trois cas peuvent se produire :

- Les coefficients $(a ; b ; c ; d)$ sont proportionnels aux coefficients $(a' ; b' ; c' ; d')$ dans ce cas, $P \cap Q = P = Q$.

L'intersection est le plan P (ou le plan Q). Les deux plans sont confondues. (il suffit que leurs vecteurs normaux respectifs soient **colinéaires** et qu'il admettent au moins un point commun)

- Les coefficients $(a ; b ; c)$ sont proportionnels aux coefficients $(a' ; b' ; c')$ sans que cette proportionnalité s'étende pour d et d' dans ce cas, $P \cap Q = \emptyset$.

L' intersection est vide et les deux plans sont parallèles.

(il suffit que leurs vecteurs normaux respectifs soient colinéaires et qu'il existe un point qui appartienne à l'un des plan sans appartenir à l'autre)

- Les coefficients $(a ; b ; c)$ ne sont proportionnels aux coefficients $(a' ; b' ; c')$ dans ce cas, $P \cap Q = D$ où D est une droite et il est possible d'exprimer les réels $(x ; y ; z)$ en fonction d'un paramètre (x ou y ou z au choix) et d'en déduire une représentation paramétrique de la droite D intersection de P et Q.

On peut également déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de chaque plan , le vecteur directeur de la droite D intersection des deux plans est le produit vectoriel des deux vecteurs normaux précédents.

(il suffit que leurs vecteurs normaux respectifs ne soient pas colinéaires)

- les plans P et Q d'équation

$$P : 2x + 3y - z + 2 = 0$$

$$Q : 4x + 6y - 2z + 4 = 0$$

sont confondus.

- les plans P et Q d'équation

$$P : 2x + 3y - z + 2 = 0$$

$$Q : 4x + 6y - 2z + 5 = 0$$

sont parallèles.

- les plans P et Q d'équation

$$P : 2x + 3y - z + 2 = 0$$

$$Q : x + y - 2z + 5 = 0$$

sont sécants déterminons la représentation

paramétrique de la droite D :

$$\begin{cases} z = 2x + 3y + 2 \\ x + y - 2(2x + 3y + 2) + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + 3y + 2 \\ -3x - 5y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = z \\ -3x - 5y + 1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y + 6 = 3z \\ -6x - 10y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = z \\ -y + 8 = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(8 - 3z) + 2 = z \\ y = 8 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -13 + 5z \\ y = 8 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 + 5z \\ y = 8 - 3z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 + 5z \\ y = 8 - 3z \\ z = 0 + 1z \end{cases}$$

D est la droite de vecteur directeur $\vec{u}(5; -3; 1)$

qui passe par le point A(-13; 8; 0)

Comment déterminer analytiquement l'intersection d'une droite et d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Si un plan P et une droite D sont définis par :

$$P : ax + by + cz + d = 0$$
$$D : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \text{ (représentation paramétrique)}$$

(t est le paramètre réel de cette représentation)

On peut déterminer par le calcul leur intersection.

Les coordonnées $(x ; y ; z)$ d'un point M appartenant à $P \cap Q$ doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a + \alpha t) + b(b + \beta t) + c(c + \gamma t) + d = 0 & (E) \\ x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre l'équation (E) d'inconnue t , trois cas peuvent se produire :

- l'équation (E) n'a pas de solution : ce qui correspond à la droite D est parallèle au plan P.
- l'équation (E) admet tout nombre réel t comme solution et dans ce cas la droite est contenue dans le plan P.
- l'équation (E) admet une seule solution t_0 , dans ce cas la droite coupe le plan en un point A de coordonnées $(x ; y ; z)$ telles que

$$\begin{cases} x = a + \alpha t_0 \\ y = b + \beta t_0 \\ z = c + \gamma t_0 \end{cases}$$

Exemple :

$$P : x + y + 2z - 5 = 0$$

$$D : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$2 + 3t + 1 - t + 2(2 + 2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t = 2 + 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \\ y = 1 - t = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ z = 2 + 2t = 2 + 2 \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

D et P se coupent en $A\left(1; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Comment déterminer analytiquement l'intersection de deux droites dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Si les droites D et D' sont définies par :

$$D : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$D' : \begin{cases} x = a' + \alpha' t' \\ y = b' + \beta' t' \\ z = c' + \gamma' t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

$a + \alpha t = a' + \alpha' t'$
$b + \beta t = b' + \beta' t'$
$c + \gamma t = c' + \gamma' t'$

On résout d'abord le système encadré d'inconnues $(t ; t')$ et on vérifie que le(s) couple(s) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) également l'équation :

$$c + \gamma t = c' + \gamma' t'$$

Trois cas peuvent se produire :

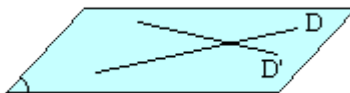
- Il n'y a pas de couple $(t ; t')$: les droites D et D' n'ont pas de point d'intersection
- Tout couple de réels $(t ; t')$ convient: les droites D et D' sont confondues.
- Un seul couple de réel $(t_0 ; t'_0)$ convient : les droites D et D' sont sécantes en un point A ses coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t_0 \\ y = b + \beta t_0 \\ z = c + \gamma t_0 \end{cases}$$

Parallélisme de plans et droites dans l'espace

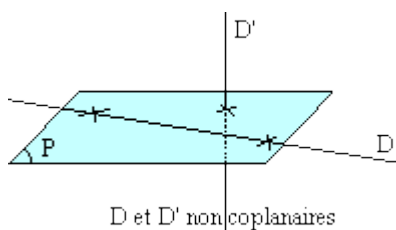
1. Positions relatives de deux droites, de deux plans, d'un plan et d'une droite ...

Deux droites sont **coplanaires** si elles sont situées dans un même plan. Cela se produit quand elles sont parallèles ou sécantes :

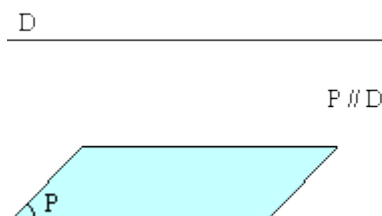
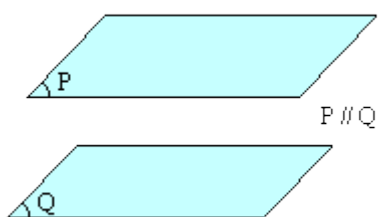


Autrement dit : pour que deux droites soient **parallèles** dans l'espace, il faut non seulement qu'elles soient sans point commun mais aussi qu'elles appartiennent au même plan.

2. Deux droites non coplanaires :

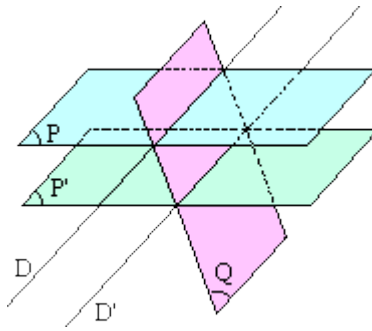


Deux plans sont **parallèles** (même chose pour un plan et une droite) lorsqu'ils n'ont aucun point commun :

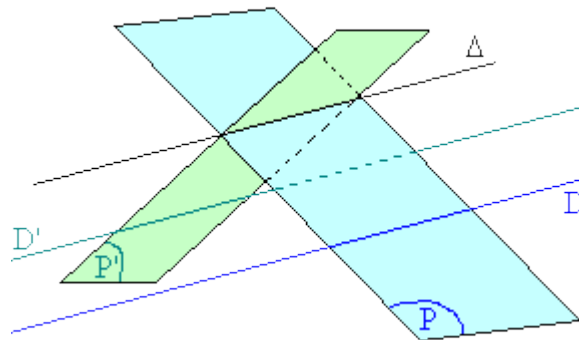


Propriétés

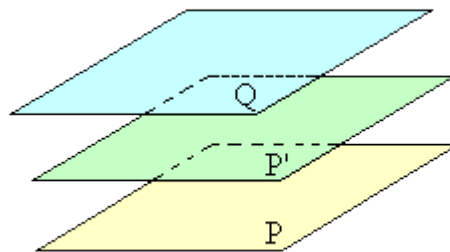
- 1) Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q coupant P coupe aussi P' et les droites intersections sont parallèles :



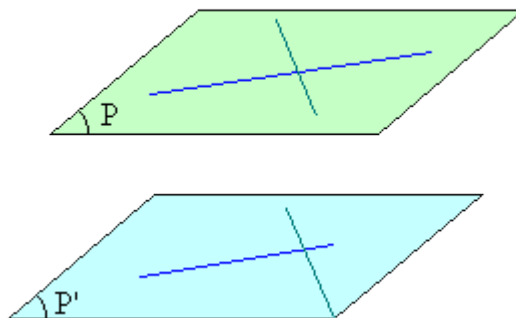
- 2) **Théorème du toit** : soient P et P' deux plans contenant respectivement deux droites parallèles D et D'.
 Si P et P' sont sécants alors Δ leur intersection est parallèle à D et D'



- 3) Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.



- 4) Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors les plans P et P' sont parallèles.



- 5) Si une droite Δ est parallèle à une droite D , alors la droite Δ est parallèle à tout plan P contenant D .

