

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**1re Année Ingénieurs G.M.**

ALGÈBRE

le 7 septembre 2015

Alg. T.D.1

(RAPPELS) Esp.Vect.- Matrices - Endomorphismes - Diagonalisation.**1**Considérons les bases suivantes de \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1) \\ f_1 = (1, 1, 1); f_2 = (1, 1, 0); f_3 = (1, 0, 0) \end{array} \right\}$$

- i) Trouver la matrice de passage P de $\{e_i\}$ à $\{f_i\}$.
 ii) Trouver la matrice de passage Q de $\{f_i\}$ à $\{e_i\}$.
 iii) Vérifier que $Q = P^{-1}$.
 iv) Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, $[v]_f = P^{-1}[v]_e$
 v) Montrer que si $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$, alors

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$$

- vi) Soit \mathcal{C}^∞ l'espace vectoriel des fonctions numériques et continuellement différentiables, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit D l'opérateur différentiel :

$$D(f) = \frac{df}{dt}$$

Chacun des ensembles suivants constitue une base d'un sous espace (à préciser la dimension correspondante) de l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty$.

Trouver la matrice associée à l'opérateur linéaire D dans chacune de ces bases :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a) \{ \exp(t), \exp(2t), t \exp(2t) \} & b) \{ \sin t, \cos t \} \\ c) \{ \exp(5t), t \exp(5t), t^2 \exp(5t) \} & d) \{ 1, t, \sin 3t, \cos 3t \} \end{array} \right\}$$

2

- i) Déterminer si les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 sont linéairement indépendants :

$$\begin{array}{l} (a) (1, -2, 1); (2, 1, -1); (7, -4, 1) \\ (b) (1, -3, 7); (2, 0, -6); (3, -1, -1); (2, 4, -5) \\ (c) (1, 2, -3); (1, -3, 2); (2, -1, 5) \\ (d) (2, -3, 7); (0, 0, 0); (3, -1, -4) \end{array}$$

- ii) Soit V l'espace vectoriel des 2×2 matrices sur \mathbb{R} .

Déterminer si dans les deux cas suivants les matrices correspondantes sont linéairement indépendantes :

$$\begin{array}{l} (a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3

- i) Pour chacune des matrices réelles symétriques suivantes A , trouver une matrice non singulière P telle que la matrice ${}^T P A P$ soit diagonale :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}; \quad (b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

- (ii) Soit E un espace vectoriel, et soit T_r la restriction d'un endomorphisme T à un sous espace T -invariant $W \subset E$; autrement dit :

$$\forall w \in W : T_r(w) = T(w)$$

Montrer que :

$$(a) \text{ Pour tout polynôme } f(t), f(T_r)(w) = f(T)(w)$$

$$(b) \text{ Le polynôme minimal de } T_r, \text{ divise le polynôme minimal de } T.$$

- (iii) Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A et B sont des matrices carrées. Montrer que le polynôme minimal $m(t)$ de M est le plus petit commun multiple des polynômes minimaux m_A, m_B de A et B respectivement. Généraliser.

- (iv) Trouver le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (b) B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4

- i) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

Trouver toutes les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de A et B , considérées comme :

a) des matrices sur le corps \mathbb{R} et, b) sur le corps des complexes \mathbb{C} .

- ii) Montrer que les matrices A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Donner un exemple où ces deux matrices ont différents vecteurs propres.

- iii) Soient S et T deux opérateurs linéaires tels que :

$$ST = TS$$

et soit λ une valeur propre de T .

Si W_λ est le sous espace propre associé à λ , montrer que W_λ est invariant par S :

$$S(W_\lambda) \subset W_\lambda.$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs G.M.

ALGÈBRE

le 14 septembre 2015

Alg. T.D.2

Formes Linéaires, Bilinéaires, Hermitiennes.

1

i) Considérons la base suivante de \mathbb{R}^3 :

$$\{v_1 = (1, -1, 3); v_2 = (0, 1, -1); v_3 = (0, 3, -2)\}$$

Trouver la base duale correspondante : $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

ii) Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur \mathbb{R} de degré $d \leq 1$, donc :

$$E = \{f(t) = a + bt; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soient deux applications :

$$\phi_1 : E \rightarrow \mathbb{R}, \phi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

définies par :

$$\phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)dt; \quad \phi_2(f(t)) = \int_0^2 f(t)dt$$

Est-ce que ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent à l'espace dual E^* ? Si oui, trouver la base $\{v_1, v_2\}$ de E qui est la base duale de $\{\phi_1, \phi_2\}$.

iii) Soit ϕ la forme linéaire de \mathbb{R}^2 , définie par : $\phi(x, y) = x - 2y$. Pour chacune des applications linéaires suivantes T de \mathbb{R}^2 trouver la transposée $T^t(\phi)(x, y)$:

$$(a) T(x, y) = (x, 0); (b) T(x, y) = (y, x+y); (c) T(x, y) = (2x-3y, 5x+2y).$$

2

i) Trouver la matrice symétrique associée à chacune des formes quadratiques suivantes :

$$a) q(x, y, z) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 14yz + 5z^2$$

$$b) q(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz$$

$$c) q(x, y, z) = xy + y^2 + 4xz + z^2$$

$$d) q(x, y, z) = xy + yz$$

ii) Utiliser la méthode de l'échelonnement pour réduire ces formes quadratiques en leurs formes canoniques.

iii) Utiliser la méthode des carrés de Gauss, pour réduire ces formes quadratiques en leurs formes canoniques.

3

i) Soient les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$: $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y \in \mathbb{R}^3$: $y = (y_1, y_2, y_3)$ et la forme bilinéaire suivante :

$$f(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

Donner une représentation matricielle de f .

- ii) Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application suivante f , est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^n :

$$f(X, Y) = X^t A Y$$

4

Soit la matrice $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i)

- a) Vérifier que H est une matrice **hermitienne**. Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.
- b) Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $D = C^* H C$, soit diagonale.
Pourquoi les éléments de la matrice D sont-ils réels ? Justifier votre réponse.
- c) Sans l'utilisation de l'échelonnage du b) la matrice H est elle diagonalisable ? Si oui, trouver les valeurs propres et justifier encore une fois le fait que la nouvelle matrice diagonale \tilde{D} a ses éléments dans \mathbb{R} (qui sont les valeurs propres de H et pas du tout ceux de D).

- ii) Faire une étude analogue pour la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 13 \end{pmatrix}$$

5

- i) Soient E, F deux espaces vectoriels avec $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ et $\dim_{\mathbb{K}} F = m$ et soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Montrer que si f^t désigne la transposée de f :

$$rg f = rg f^t.$$

- ii) Pour chaque matrice hermitienne (resp. réelle symétrique) trouver une forme hermitienne (resp. forme bilinéaire symétrique), et la forme quadratique correspondante qui admet la matrice correspondante comme représentation.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs G.M.
 ALGÈBRE
 le 21 septembre 2015
 Alg. T.D.3
Algèbre et Convexité
Espaces Préhilbertiens Esp.Vect. Normés

1

i) Montrer que :

$$f \text{ affine} \Leftrightarrow f \text{ convexe et concave.}$$

ii) Montrer que si une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe (avec $f(\Omega) \subset I$) et si une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe croissante alors la fonction composée $g \circ f$ est convexe.

iii) Appliquer pour montrer :

a) Si f est une fonction convexe sur \mathbb{R} alors la fonction $\exp(f)$ est convexe.

b) Si une fonction $f > 0$ est convexe alors la fonction f^2 est convexe.

c) Si $f > 0$ et la fonction $\ln(f)$ est convexe alors la fonction f est convexe.

iv) Etudier la convexité des fonctions réelles suivantes :

$$a) f(x) = |x|; \quad b) f(x) = x^2 + |x| + 2; \quad c) f(x) = \exp(|x|)$$

$$d) f(x) = \exp(-x); \quad e) f(x) = \exp(x^2); \quad f) f(x) = \exp(-x^2)$$

2

i) Vérifier que l'expression suivante est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

où

$$u = (x_1, x_2), \quad v = (y_1, y_2)$$

ii) Trouver la norme de $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ par rapport : a) au produit scalaire ordinaire, b) au produit scalaire du i)

iii) Normaliser chacun des vecteurs suivants, dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 .

$$a) u = (2, 1, -1); \quad b) v = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{4}\right)$$

iv) Pour un espace Euclidien, établir les propriétés suivantes de la norme :

a) Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

b) Identité de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$$

c) Relation de Pythagore :

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{si } \langle x, y \rangle = 0$$

v) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour tout espace préhilbertien.

vi) Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur \mathbb{R} muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soit $f(t) = t + 2$ et $g(t) = t^2 - 2t - 3$.

Trouver : a) $\langle f, g \rangle$ et, b) $\|f\|$.

3

i) Montrer que les applications suivantes N_1, N_2, N_3 de $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ définissent trois normes équivalentes sur \mathbb{R}^k :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto N_1(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto N_2(x) = \sum_{i=1}^k |x_i|$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto N_3(x) = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_k|\}$$

ii) Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m, n)$.

Montrer que pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m, n))^2$ la trace $Tr(A^*B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m, n)$.

4

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur \mathbb{R} de degré $r \leq 2$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

i) Trouver une base du sous espace F orthogonal à $h(t) = 2t + 1$.

ii) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, à la base $1, t, t^2$ pour obtenir une base orthonormée de E .

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs G.M.
 ALGÈBRE
 le 28 septembre 2015
 Alg. T.D.4
(Op. et matrices Normales-Op. et matrices Unitaires
Normes Matricielles

1

Soit T un opérateur normal sur un espace préhilbertien (E, \langle, \rangle) . Démontrer que :

- i) $\forall v \in E, T(v) = 0$, si et seulement si $T^*(v) = 0$
- ii) L'opérateur $T - \lambda I$ est un opérateur normal.
- iii) Si $T(v) = \lambda v$ alors $T^*(v) = \bar{\lambda} v$;
 donc tout vecteur propre de T , est aussi vecteur propre de T^* .
- iv) Si,

$$T(v) = \lambda_1 v \text{ et } T(w) = \lambda_2 w \quad \text{où } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = 0;$$

C'est à dire les vecteurs propres de T correspondant à des valeurs propres distinctes de T sont orthogonaux.

- v) Déterminer laquelle des matrices suivantes est normale :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$$

2

Soit la matrice : $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que la matrice U est unitaire. Est-elle hermitienne ? Est-elle normale ?
- b) On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 , muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit,
 $\forall v \in \mathbb{C}^2$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 |v_i|^2}.$$

Pourriez-vous définir le produit scalaire auquel correspond la norme précédente ?

Soit le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle $\|u\|_2$, et celle du vecteur transformé $U(u)$ où U est la matrice unitaire de la question a). Comparer les deux normes et justifier votre résultat par application d'un théorème du cours (avec démonstration).

3

On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^n , muni de la norme $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall v \in \mathbb{C}^n$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

Montrer que si $A = \{a_{il}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A , et si on considère la norme matricielle :

$$\|A\|_2 \equiv \sup_{v \neq \{0\}} \frac{\|A(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

alors :

i) Cette norme est invariante par transformations unitaires.

ii)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2.$$

iii) Si $A = \{a_{il}\} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m, n)$, alors la norme matricielle $\|A\|_2$ n'est autre que la plus grande valeur singulière de la matrice A .

iv) Appliquer (ii) et (iii) pour une matrice A **unitaire**.

v) On considère deux nombres réels α , et β ; soit la matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha) \cos \beta & \exp(-i\alpha) \sin \beta \\ -\exp(i\alpha) \sin \beta & \exp(-i\alpha) \cos \beta \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice U est unitaire.

Si oui, appliquer les résultats précédents.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**1re Année Ingénieurs G.M.**

ALGÈBRE

le 5 octobre 2015

Alg. T.D.5

Algèbre et Analyse Numérique**1**

On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^n , muni d'un produit scalaire \langle, \rangle et de la norme associée $\|v\|_2$ définie comme il suit, $\forall v \in \mathbb{C}^n$:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

Pourriez-vous définir le produit scalaire \langle, \rangle auquel correspond la norme précédente ?

On considère aussi $\forall A = \{a_{ij}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle précédente :

$$\|A\|_2 = \sup_{\substack{\nu \in \mathbb{C}^n \\ \|\nu\| \leq 1}} \|A\nu\|_2 = \sup_{\substack{\nu \in \mathbb{C}^n \\ \|\nu\| = 1}} \|A\nu\|_2$$

Montrer que :

- i) La norme vectorielle $\|v\|_2$ est invariante par transformations unitaires.
- ii) La norme matricielle $\|A\|_2$, est invariante par transformations unitaires.
- iii) Si la matrice $U = \{u_{ij}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $U = \{u_{ij}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est unitaire (resp. orthogonale), alors :

$$\|U\|_2 \equiv \sup_{\substack{\nu \in \mathbb{C}^n \\ \|\nu\| \leq 1}} \|U\nu\|_2 \equiv \sup_{\substack{\nu \in \mathbb{C}^n \\ \|\nu\| = 1}} \|U\nu\|_2 = 1$$

$$\|U\|_2 \equiv \sup_{v \neq \{0\}} \frac{\|U(v)\|_2}{\|v\|_2} = 1$$

- iv) Soit la matrice $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2+i}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier si la matrice U est unitaire. Est-elle hermitienne ? Est-elle normale ?
Trouver la norme matricielle de U en appliquant un des résultats précédents.
- b)

Soit le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle $\|u\|_2$, et celle du vecteur transformé $U(u)$ où U est la matrice unitaire de la question a). Comparer les deux normes et justifier votre réponse par application d'un des résultats précédents.

Montrer le théorème suivant :

Théorème 0.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(m, n)$

$\Rightarrow \exists$ une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et une autre matrice unitaire $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mu_r & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \mu_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r \quad \text{et } r = \text{rg } A$$

Les nombres réels positifs μ_i s'appellent les **valeurs singulières** de la matrice A , et sont les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice carrée autoadjointe A^*A .

4

a) **Localisation des valeurs propres**

Donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 0.2 (Gerschgorin - Hadamard)

Soit $A = \{a_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit les "**disques de Hadamard**" sur le plan \mathbb{C} par :

$$D_\ell = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z - a_{\ell\ell}| \leq \sum_{j \neq \ell} |a_{\ell j}| \right\}$$

$$\Rightarrow Sp(A) \subset \bigcup_{\ell=1}^n D_\ell$$

b) Pour la matrice A suivante trouver les valeurs propres, ensuite appliquer le théorème pour constater leur localisation d'après les disques de Hadamard.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs G.M.

ALGÈBRE

le 12 octobre 2015

Alg. T.D.6

REVISIONS

1

Sur l'espace vectoriel produit $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ on définit l'application suivante $f(X, Y)$:

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$$

$$\text{(avec } X = \{x_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{y_i \in \mathbb{C}; \forall i = 1, 2, 3\}) :$$

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{y}_i$$

- (i) Montrer que l'application f est un **“bon produit scalaire”** sur \mathbb{C}^3 . Déterminer la **norme vectorielle** associée.
- (ii) Soit l'espace vectoriel unitaire $(\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni du produit scalaire de la question (i).

Sur cet espace on définit l'opérateur T suivant :

$$\forall X = \{x_1; x_2; x_3\} \in \mathbb{C}^3, \quad T(x_1; x_2; x_3) = Y = \{y_1; y_2; y_3\}$$

$$\text{avec : } y_1 = x_1 + ix_2; \quad y_2 = -ix_1 + x_2; \quad y_3 = 3x_3$$

- (a) En utilisant le produit scalaire du (i), déterminer l'opérateur adjoint T^* de l'opérateur T , par son action sur un vecteur quelconque $X = \{x_1; x_2; x_3\} \in \mathbb{C}^3$.
Que peut-on conclure pour ces deux opérateurs T et T^* ?
- (b) Donner les deux représentations matricielles correspondantes A de T et B de T^* . Sont-elles hermitiennes ? Commenter votre résultat par rapport au (a).
- (c) Trouver une forme **quadratique hermitienne** qui admet A comme représentation matricielle.
Trouver une matrice non singulière C telle que la matrice $H = C^*AC$, soit diagonale. Vérifier votre résultat.
Trouver une forme quadratique hermitienne qui admet H comme représentation matricielle.

iii

- (a) Soit la matrice $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Vérifier si la matrice V est **Unitaire**. Est-elle Hermitienne ? est elle **Orthogonale** ? est-elle **Normale** ?

- (b) On considère l'espace vectoriel unitaire $(\mathbb{C}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni du produit scalaire de la question (i), et sa norme associée, $\|v\|_2$.

On considère le vecteur $u \in \mathbb{C}^3$ suivant :

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Calculer la norme vectorielle de ce vecteur u particulier, et du vecteur transformé $V(u)$ (avec V la matrice de la question (a)). Comparer les deux normes. En supposant que V est unitaire justifier votre résultat par application d'un théorème. **Donner la démonstration de ce théorème.**

- (c) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, m)$ on définit la **norme matricielle** subordonnée à la norme vectorielle $\|v\|_2$ par :

$$\|M\|_2 \equiv \sup_{v \neq 0} \frac{\|M(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

Quelle est la norme matricielle de la matrice V de la question (a) ?

2

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à coefficients complexes suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{y}_i$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$.
En déduire la norme vectorielle associée à ce produit scalaire. Quelle est la relation de f avec le produit scalaire usuel ?
- b) La matrice A est-elle Hermitienne ?
- c) Appelons aussi A l'opérateur qui admet la matrice A comme représentation matricielle. En utilisant le produit scalaire f déterminer l'opérateur adjoint A^* de A .
2. a) Vérifier si la matrice AA^* est normale et hermitienne. Déterminer les valeurs propres de AA^* et en déduire le rayon spectral correspondant.
- b) Énoncer et démontrer le théorème de **Gerschgorin - Hadamard**

- c) Appliquer ce théorème à la matrice AA^* pour constater la **localisation** de ses valeurs propres (trouvées précédemment au a) à l'intérieur de l'union des disques de Hadamard. Faire le graphique et interpréter votre résultat.
3. a) Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on définit la **norme matricielle** subordonnée à la norme vectorielle (issue du produit scalaire usuel) $\|v\|_2$ par :

$$\|B\|_2 \equiv \sup_{v \neq 0} \frac{\|B(v)\|_2}{\|v\|_2}$$

Déterminer la norme matricielle $\|A\|_2$ en termes du rayon spectral de AA^* trouvé dans 2).

(Utilisation d'un théorème du cours **sans** démonstration).

- b) Si U et V sont deux opérateurs unitaires donner la valeur de la norme matricielle $\|U^*AV\|_2$. Justifier votre réponse en **donnant la démonstration** de la conservation des normes matricielles par transformation unitaire.

1 Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur \mathbb{R} de degré $d \leq 2$, donc :

$$E = \{P(t) = a + bt + ct^2; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On définit une application g de E^2 dans \mathbb{R} par :

$$g : E \times E \mapsto \mathbb{R} \\ g(P, Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

- a) Montrer que g définit un produit scalaire sur E^2 et en déduire la norme associée.
- b) Soit F un sous espace vectoriel de E orthogonal à $Q(t) = 2t$. Trouver une base de F .