Exercice 2 :

On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Donner $P_c(A)(X)$ et $P_c(B)(X)$.

2) Les matrices A et B sont-elles semblables ? Justifier votre réponse.

3) Donner une matrice réduite de Jordan semblable à la matrice A et différente de A.

4) Donner les matrices D et N correspondant à la décomposition de Dunford de la matrice A; quelle est l'ordre de nilpotence de la matrice N ?

5) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA}.

Exercice 3 :

Dans tout cet exercice, A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que **rang A = 1** *et $n \in \mathbb{N} - \{0 ; 1\}$*

1. Le but de cette partie est de montrer que $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

a) On suppose A diagonalisable.

Donner dim Ker A, $sp(A)$, $P_m(A)$ et en déduire que $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

b) On suppose A non diagonalisable.

Donner dim Ker A, $sp(A)$, tr (A).

Soit Y_n un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $\operatorname{Im} A = Vect(Y_n)$.

Montrer que Y_n est un vecteur propre de A, et qu'il existe un vecteur X_n de $\mathbb{R}^n$ tel que $Y_n = A X_n$.

Soient $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formant une base de Ker A ; montrer que la famille $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}, X_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

En déduire la valeur de A^2 puis justifier la relation $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

2. a) Justifier que si A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & 0 & & \cdot \\ \cdot & & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & tr\,A \end{pmatrix}P^{-1}$$

b) Justifier que si A n'est pas diagonalisable , alors il existe une matrice P inversible

telle que $$A = P\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & 0 & & 0 \\ \cdot & & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

c) Montrer que si A et B sont deux matrices de rang 1, alors

$$(A \text{ est semblable à } B) \Leftrightarrow (\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B)$$

Exercice 4 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soit $B = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E et B* sa base duale.

On note f_1, f_2, f_3, f_4 les formes linéaires sur E définies par :
$\forall P \in E \quad f_1(P) = P(1) \;;\quad f_2(P) = P'(1) \;;\quad f_3(P) = P''(1) \;;\quad f_4(P) = P'''(1)$

1) Montrer que $B_1^* = \{ f_1, f_2, f_3, f_4 \}$ est une base de E* .

2) Déterminer la base B_1 de E telle que B_1^* soit la base duale de B_1.
Donner la matrice de passage notée Q, de la base B vers la base B_1.

3) Soit u l'endomorphisme de E défini par :
$\forall P \in E \quad u(P) = 2P + (1 - X)P'$ et ${}^t u$ l'endomorphisme transposé de u.

a) Déterminer $M = mat_{B,B}(u)$ et $N = mat_{B^*,B^*}({}^t u)$.

b) Donner la relation entre $O = mat_{B_1^*,B_1^*}({}^t u)$ et les matrices Q et N.

Université de Pau et des Pays de l'Adour

UFR Sciences

Département de Mathématiques

Deuxième session 2006 – 2007

LICENCE : L.M.I. 2ième année

U.E. : TMTL02U - Algèbre 2.

Durée : 3 heures

Calculatrice U.P.P.A. autorisée

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & -1 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 puis montrer que $A^2 - A - 2I_4 = 0_4$.

2) Montrer que A est diagonalisable.

3) Donner, en justifiant, $P_m(A)(X)$.

4) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(A - 2I_4)$; en déduire $P_c(A)(X)$.

5) A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1} par la méthode de votre choix.

6) Montrer qu'il existe une matrice P inversible de $M_4(\mathbb{R})$ et une matrice B de $M_4(\mathbb{C})$ qu'on déterminera telles que $A = P\,B^2\,P^{-1}$, puis montrer qu'il existe une matrice C de $M_4(\mathbb{C})$ telle que $A = C^2$.

7) Montrer qu'il existe des matrices K et L de $M_4(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 2^n K + (-1)^n L.$$

Déterminer K et L puis donner K^2 et L^2 et expliquer les résultats obtenus.

Université de Pau et des Pays de l'Adour
Département de Mathématiques

Année : 2006-2007
Epreuve : Algèbre linéaire
$2^{ième}$ session
Date : Juin 2007
Durée: 2 heures

Documents non autorisés.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = M_{B_0}(u) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) a) Calculer le produit ${}^tMM$. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ et donner $M_{B_0}(u^{-1})$.

b) Démontrer que : $u^2 - \frac{2}{5}u + e = f_0$, e et f_0 désignant respectivement l'application identique de $\mathbb{R}^4$ et l'application identiquement nulle.

2) a) On pose $a_1 = (1,0,0,0)$, $a_2 = \frac{1}{5}(1,2,4,2)$, $a_3 = (0,-2,1,0)$, $a_4 = (0,0,1,-2)$.

Vérifier que $B = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer $M_B(u)$ en utilisant la relation de changement de base.

3) On se propose dans cette question de retrouver $M_B(u)$ (on n'utilisera donc pas le résultat obtenu au 2) b)).

Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^4$.

a) Démontrer que $(x, u(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de 1) b).

b) On pose $F = Vect(x, u(x))$.

Démontrer que F est stable par u (c'est à dire : $u(F) \subset F$).

c) Calculer $u(a_1)$ et $u(a_4)$. Déduire de b) $u(a_2)$ et $u(a_3)$. Retrouver ainsi $M_B(u)$.