AS 2007/2008

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

# Devoir maison n°1

Algèbre
Matrices: déterminant-rang-systèmes

22/02/2008

EXERCICE 1:

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $J=A-I_3$.

1) Montrer que J est nilpotente.

2) En utilisant la formule du binôme, calculer $A^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3) On considère le système récurrent suivant:(S) $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$

On pose $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer (S) sous forme matricielle.

4) Supposons que $X_{n+1} = AX_n$, vérifier que $X_n = A^nX_0$.

5) Pour $X_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \\ w_0 = 2 \end{cases}$. Exprimer les suites $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de n.

EXERCICE 2

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on note $M_{(a,b)}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer la matrice $M_{(a,b)}$ en fonction de la matrice identité $I_3$ et d'une matrice A indépendante de a et b.

2) a. Déterminer le rang de la matrice A.

b. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

3) a. Montrer que l'ensemble E des matrices $M_{(a,b)}$ quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, muni des opérations usuelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base de E.

b. Déterminer toutes les matrices de E de la forme $M^2=I_3$.

EXERCICE 3

Soient a et b deux réels. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3 & 2 & a \\ a-1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

On considère le système linéaire d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(S)\ \begin{cases} x + ay + (a-1)z = b \\ 3x + 2y + az = -1 \\ (a-1)x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

1) i) Calculer det(A). On exprimera le résultat sous la forme $\det(A)=\lambda a^2(4-a)$ où $\lambda$ est un réel non nul à définir.

   ii) Soit b un réel donné. Pour quelles valeurs de a est-on assuré que (S) admet une solution unique?

2) On suppose dans cette question que a=4. On note $C_1$ et $C_2$ les deux premiers vecteurs colonnes de A.

   i) Justifier que $rg(A)\leq 2$.

   ii) Montrer que $rg(A)=2$ et $(C_1,C_2)$ forme une base de Imf.

   iii) En déduire que (S) admet des solutions si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 4 & b \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ est nul.

   iv) Montrer que (S) n'admet de solution que pour une valeur de b à préciser:

      - en utilisant les résultats précédents
      - en résolvant directement le système (S) par la méthode de Gauss