

EISTI



Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Devoir Surveillé n°1

Epreuve : Algèbre
Matrices: déterminant-rang-systèmes
Durée : 2 heure
Documents non autorisés,
Calculatrice non autorisée.

21/03/2008

EXERCICE 1: (3 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et vérifier que $M^3=0$.
2. Exprimer $(I-M)(I+M+M^2)$ et en déduire que $I-M$ est inversible. Préciser son inverse.

EXERCICE 2 (5 points)

1) Calculer N^k , $k \geq 1$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer A en fonction de N et en déduire A^n , $n \geq 1$.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (m, 1, 1)$; $e_2 = (1, m, 1)$, $e_3 = (1, 1, m)$.

1. déterminer suivant les valeurs de m le rang de la famille \mathcal{B} .

2. soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
- b) Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

EXERCICE 4 (points)

Résoudre dans \mathbb{R}^4 le système suivant,

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - 3y + z + t = a \\ x + y - 3z + t = a^2 \\ x + y + z - 3t = a^3 \end{cases}$$

1. Par la méthode du pivot de Gauss.
2. En résolvant l'équation matricielle associée.

EXERCICE 3 (6 points)

- 1) Soit A une matrice réelle d'ordre 3 vérifiant $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0_3$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
- 2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n + A^{n-1} + \dots + A + I_n = 0$.
 - a. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
 - b. Calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 2i+1 & i+1 & -i-1 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+2 & 2i+2 & -i-2 \end{pmatrix}.$$

- 2) Montrer que si A est nilpotente alors $A - \alpha I_n$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, est inversible.

EXERCICE 1

Soit a un réel. On note $B_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & a+2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & a-2 \end{pmatrix}. \quad \text{On note } \text{rg}(A) \text{ le rang de la matrice } A.$$

Partie I:

- 1) calculer $\det(A)$.

On exprimera le résultat sous la forme $\det(A) = \lambda a^2 (a^2 - 1)$ où λ est un réel non nul à définir.

- 2) Pour quelle valeur de a , la matrice A est-elle inversible?

Partie II:

On suppose dans cette question que $a=1$.

- 1) Ecrire A dans ce cas. Justifier que: $\text{rg}(A) \leq 3$.
- 2) en utilisant un déterminant mineur, montrer que: $\text{rg}(A) \geq 3$. Déduire $\text{rg}(A)$.
- 3) calculer $u_1 = f(e_1)$, $u_2 = f(e_2)$ et $u_3 = f(e_3)$.
 - i. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\text{Im } f$.
 - ii. déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\text{Im } f$.

partie III

- 1) Ecrire la matrice A lorsque $a=-2$.
- 2) Justifier que le système linéaire (S_1) d'inconnues (x, y, z, t) admet une solution (x, y, z, t) unique dans \mathbb{R}^4 .

$$(S_1) \begin{cases} -x + y - t = 3 \\ x - z - 2t = 1 \\ y - 3z - t = 0 \\ x + 2y - z - 4t = 1 \end{cases}$$

Résoudre (S_1) à l'aide du pivot de Gauss.

Exercice 3

Pour tout couple (a,b) de \mathbb{R}^2 , on note $M_{(a,b)}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

- 1) Exprimer la matrice $M_{(a,b)}$ en fonction de la matrice identité I_3 et d'une matrice A indépendante de a et b .
- 2) a. Déterminer le rang de la matrice A .
b. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
- 3) a. Montrer que l'ensemble E des matrices $M_{(a,b)}$ quand (a,b) décrit \mathbb{R}^2 , muni des opérations usuelles est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Donner une base de E .
b. Déterminer toutes les matrices de E de la forme $M^2=I_3$.
- 4) Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice associée relativement à la base canonique est $M_{(a,b)}$ (a et b fixés). Soient $f_1=(1,1,1)$, $f_2=(-1,0,1)$ et $f_3=(0,-1,1)$.
 - a. Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b. Donner la matrice de passage de la base canonique dans cette nouvelle base.
 - c. Soient X un vecteur dans la base canonique et X' le même vecteur avec ses coordonnées dans la nouvelle base. Donner la relation entre X et X' . En déduire la matrice de u dans cette base.

Exercice 3

1) La matrice N est nilpotente d'ordre 3, i.e $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k=0, k \geq 3$.

2) On remarque que $A=I_3+N$, d'où $A^n=(I_3+N)^n$. On peut appliquer la formule du binôme car I_3 et N

$$\text{commutent, d'où } A^n = \sum_{k=0}^n C_n^k N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k N^k = C_n^0 N^0 + C_n^1 N^1 + C_n^2 N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$$1) a. \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{L_3 \leftrightarrow L_1 + 2L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{L_3 \leftrightarrow L_2 - 2L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

D'après le th. du rang nous avons $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\operatorname{Im} f) = 4 - 3 = 1$.

Or f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, donc f n'est pas injective. De plus, f va de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 , donc injective \Leftrightarrow surjective \Leftrightarrow bijective. Donc f n'est rien de tout cela.

b. Soit $u \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0$. Si on note $X = (x, y, z, t)$ les coordonnées de u dans la base canonique alors l'égalité s'écrit sous la forme matricielle $AX = 0$, ce qui conduit au système,

$$\begin{cases} 2x + y - 4z - t = 0 \\ 4y = 0 \\ -x + 0.5y + 2z + 2t = 0 \\ 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = t = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{(2z, 0, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$. Donc une base de $\operatorname{Ker} f$ est donnée par le vecteur $(2, 0, 1, 0)$.

$\operatorname{Im} f$ est engendré par les colonnes de la matrice A , de plus $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$, ce qui signifie que 3 colonnes parmi les 4 sont libres. On peut remarquer que $C_3 = -2C_1$ donc une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{(2, 0, -1, 0), (1, 4, 1/2, 0), (-1, 0, 2, 3)\}$.