

Bonjour,

les sujets sont à rendre à l'entrée des vacances. Veuillez respecter l'attribution des sujets. Les élèves sont aussi invités à faire les autres sujets pour préparer l'examen d'algèbre. Si vous avez des questions, n'hésitez pas de me laisser un message. (mail: a\_nisrine@yahoo.fr)

Bonnes vacances et bonnes fêtes.

Nisrine Fortin-Camdavant

SUJET 1	SUJET 2	SUJET 3
<b>ALLAMAN</b> Christophe	<b>GASTEUIL</b> Alexis	<b>ETCHEVERRY</b> Arnaud
<b>TREY</b> Franck	<b>GESTAS</b> Brice	<b>GAULTIER DE CARVILLE</b> Louis
<b>CHEIK</b> Abal-Kassim	<b>GUILLOUT</b> Quentin	<b>JAMME DE LAGOUTINE</b> Baptiste
<b>LACHAL</b> Michael	<b>MARQUES</b> Gwenaël	<b>LEFEVRE</b> Florian
<b>MUSSARD</b> Matthieu	<b>NAVARTE</b> Michaël	<b>RANISAVLJEVIC</b> Elisabeth
<b>OLHASQUE</b> William	<b>POMMEROLLE</b> Romain	<b>VIVIER</b> Anthony
<b>PRADET</b> Quentin	<b>SASPITURRY</b> Damien	<b>BERNARD</b> Paul
	<b>VERDIER</b> Valérie	

# Devoir maison

*Algèbre*

## Sujet 1:

### Exercice 1:

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On suppose  $A$  nilpotente d'ordre  $p$ , c'est-à-dire  $A^p = 0$  et  $A^{p-1} \neq 0$ .

- Montrer que  $A$  n'est pas inversible.
- Déterminer les valeurs propres de  $A$  ainsi que son polynôme caractéristique.
- On pose  $B = A + I$ . Calculer  $\det B$ . En déduire que  $B$  est inversible et donner son inverse.
- Calculer les valeurs propres de  $B$ .  $B$  est-elle diagonalisable?

### Exercice 2:

A l'aide du théorème de Cayley Hamilton, évaluer  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

### Exercice 3:

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & -1 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$  puis montrer que  $A^2 - A - 2I_4 = O_4$ .
- Montrer que  $A$  est diagonalisable.
- Donner, en justifiant, le polynôme minimal  $P_m(A)(X)$ .
- Donner la dimension de  $\text{Ker}(A - 2I_4)$ ; en déduire le polynôme caractéristique  $P_c(A)(X)$ .
- $A$  est-elle inversible? Si oui, calculer  $A^{-1}$  par la méthode de votre choix.
- Montrer qu'il existe une matrice  $P$  inversible de  $M_4(\mathbb{R})$  et une matrice  $B$  de  $M_4(\mathbb{C})$  qu'on déterminera telles que  $A = P B^2 P^{-1}$ , puis montrer qu'il existe une matrice  $C$  de  $M_4(\mathbb{C})$  telle que  $A = C^2$ .
- Montrer qu'il existe des matrices  $K$  et  $L$  de  $M_4(\mathbb{R})$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 2^n K + (-1)^n L$ .

Déterminer  $K$  et  $L$  puis donner  $K^2$  et  $L^2$  et expliquer les résultats obtenus.

### Exercice 4:

Résoudre le système différentiel  $X'(t) = A X(t)$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$  lorsque:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (*utiliser un changement d'inconnues*)

### Exercice 5:

Soit  $P_0$  un plan affine d'un espace affine. Soit  $ABC$  un triangle de  $P_0$ . On note  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  les milieux respectifs des  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ . Soit  $P$  un plan parallèle à  $P_0$  et  $O$  un point hors de  $P$  et de  $P_0$ . Les droites  $(OA)$ ,  $(OB)$  et  $(OC)$  coupent  $P$  en  $A_{00}$ ,  $B_{00}$  et  $C_{00}$  respectivement.

Montrer que  $(A_0A_{00})$ ,  $(B_0B_{00})$  et  $(C_0C_{00})$  sont concourantes ou parallèles.

Sujet 2:**Exercice 1 :**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer  $A^n$ .

2) Soit  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $(U_n)$  la suite définie par  $U_{n+1} = A U_n$ .

3) Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 2:**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer qu'il existe  $a, b, c$  réels tels que:  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a P_1 + b N + c P_2$  avec  $P_1, P_2$  matrices associées à des projecteurs et  $N$  une matrice nilpotente; puis que  $P_1, N, P_2$  sont solutions d'un système matriciel.

2) En déduire  $P_1, N, P_2$  puis  $A^n$ .

**Exercice 3:**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix}. \text{ Montrer que } A \text{ est nilpotente et calculer } e^{tA}.$$

**Exercice 4:**

$$\text{On admet que } \forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Montrer que } \exp \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \text{ et } \exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch x & sh x \\ sh x & ch x \end{pmatrix}$$

**Exercice 5:**

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites d'un plan affine sécantes en  $O$ , deux autres droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sécantes en  $O'$ .

$$D_1 \cap D_2 = \{O\}; D_1 \cap \Delta_1 = \{A\}; D_1 \cap \Delta_2 = \{B\}; D_2 \cap \Delta_1 = \{B'\}; D_2 \cap \Delta_2 = \{A'\} \text{ et } \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{O'\}$$

Montrer que les milieux de  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[OO']$  sont alignés.

**Sujet 3:****Exercice 1:**

On considère le système différentiel  $X'(t) = A X(t)$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Partie A:**

- a) Montrer que si l'on note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , on a les relations suivantes:  
 $f = -p_1 + 2p_2 + 3p_3$  ( $p_1, p_2, p_3$  projecteurs)

$$e^{tf} = e^{-tp_1} \circ e^{2tp_2} \circ e^{3tp_3}$$

$$e^{tf} = \left( I_3 + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \right) p_1 \right) \circ \left( I_3 + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} \right) p_2 \right) \circ \left( I_3 + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3t)^n}{n!} \right) p_3 \right)$$

$$e^{tf} = e^{-t} p_1 + e^{2t} p_2 + e^{3t} p_3$$

puis que  $e^{tA} = e^{-t} P_1 + e^{2t} P_2 + e^{3t} P_3$  ( $P_1, P_2, P_3$  matrices de projection)

- b) Montrer que  $P_1, P_2, P_3$  sont solutions d'un système linéaire.  
 c) Montrer qu'il existe un polynôme  $P_1$  de degré 2 vérifiant:  $P_1(\lambda_1) = 1, P_1(\lambda_2) = P_1(\lambda_3) = 0$  lorsque  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_3$ ; puis que  $P_1 = P_1(A)$

En déduire l'expression de  $P_1, P_2, P_3$  comme polynômes en  $A$ .

- d) A l'aide des questions précédentes, résoudre le système  $X'(t) = A X(t)$ .

**Partie B:**

- i. Montrer qu'on peut trouver une matrice  $P$  telle que:  $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1}$

- ii. Montrer que la solution du système s'écrit:  $X(t) = \sum_{i=1}^3 c_i e^{\lambda_i t} v_i$  où  $v_i \in \text{Ker}(A - \lambda_i I_3)$  et résoudre le système.

**Exercice 2:**

Soient  $A, B, C$  trois points indépendants d'un plan affine  $E$ . Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux points distincts de  $E$  définis par un triplet de coordonnées barycentriques  $(x_1, y_1, z_1)$  avec  $x_1 + y_1 + z_1 = 1$  pour  $M_1$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  avec  $x_2 + y_2 + z_2 = 1$  pour  $M_2$  par rapport à  $(A, B, C)$ .

1. A quelle condition un point  $M$  défini par un triplet de coordonnées barycentriques  $(x, y, z)$  avec  $x + y + z = 1$  appartient-il à la droite  $(M_1 M_2)$  ?
2. Soit  $P$  un point de coordonnées barycentriques  $(x_P, y_P, z_P)$  avec  $x_P + y_P + z_P = 1$ . Soit  $A_1$  le milieu de  $[BC]$  et  $A'$  le symétrique de  $P$  par rapport à  $A_1$ .

Déterminer un système de coordonnées barycentriques  $(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$  avec  $x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 1$  de  $A'$  par rapport à  $(A, B, C)$ .

3. Soit  $B_1$  le milieu de  $[CA]$  et  $B'$  le symétrique de  $P$  par rapport à  $B_1$ . Soit  $C_1$  le milieu de  $[AB]$  et  $C'$  le symétrique de  $P$  par rapport à  $C_1$ . Montrer que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en un même point  $Q$ .

Montrer que  $Q$ ,  $P$  et  $G$  sont alignés (avec  $G$  isobarycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$ ).