



# Devoir maison 1

29/10/2007

Nistrine Fortin-Camdavant

*Algèbre*

## Devoir à rendre à la rentrée des vacances.

### Exercice 1:

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(K)$ . Montrer que  $A$  et  $A^t$  ont les mêmes valeurs propres.
2. Pour  $A \in M_2(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que  $A$  et  $A^t$  ont les mêmes valeurs propres.
- b) Déterminer les vecteurs propres de  $A$  et  $A^t$ .
- c) Dédire.

### Exercice 2:

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $A_m \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice  $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de  $A_m$  et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de  $m$  le rang de  $A_m$ . Déterminer lorsque cela est possible  $A_m^{-1}$ .

### Exercice 3:

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $m$  sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ayant chacun  $n$  valeurs propres distincts dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$

### Exercice 4:

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et de base  $(e_1, e_2, e_3)$ . On désigne par  $I_E$  l'application identité de  $E$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$  telle que:

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

1. Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
2. Donner la dimension et une base de  $\text{Ker}(f - I_E)$

### Exercice 5:

Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 6:

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . On suppose que  $f$  possède une unique valeur propre  $\lambda$ .

- a) A quelle condition l'endomorphisme est-il diagonalisable ?

- b) Calculer le polynôme caractéristique de  $f$ .
- c) Justifier que l'endomorphisme  $f - \lambda I_E$  est nilpotent.

Exercice 7:

Les questions sont indépendantes.  $K$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $B=(e_1, \dots, e_n)$  est une base fixée de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Quels sont les valeurs propres de l'endomorphisme nul de  $E$  ?
2. On suppose que la matrice de  $f$  dans  $B$  est  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ .
  - i. 2 est-elle valeur propre de  $f$ ?
  - ii. Le vecteur  $2e_1 + e_2 + e_3$  est-il un vecteur propre de  $f$ ?
3. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, justifier:
  - i. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  et si  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  alors  $\lambda$  est racine de  $P$ .
  - ii. Si  $\lambda$  est une racine d'un polynôme annulateur de  $f$  alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ .
4. Si l'endomorphisme  $f$  admet 0 pour valeur propre et est diagonalisable, que peut-on dire de la dimension du noyau de  $f$ ?

Exercice 8:

1. Montrer que l'application  $f : P(X) \rightarrow (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .
2. Former la matrice de  $f$  relative à la base canonique de  $E$ .
3. En déduire la diagonalisabilité de  $f$  ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 9 :

On se donne deux nombres réels  $a_0, b_0$  et on considère les suites  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  définies par :

$$(E_n) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 6a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Pour  $n \geq 0$ , on définit la matrice colonne  $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

- a) Écrire  $(E_n)$  sous la forme  $V_{n+1} = AV_n$  où  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2.
- b) Écrire  $V_n$  en fonction de  $A$ ,  $n$  et  $V_0$ .
- c) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .
- d) Donner des vecteurs propres associées à ces valeurs propres.
- e) Écrire  $A$  sous la forme  $PDP^{-1}$  où  $D$  est une matrice diagonale et  $P$  une matrice inversible.
- f) Calculer  $D^n$  puis  $A^n$  pour  $n \geq 0$ .
- g) En déduire une expression de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ ,  $a_0$  et  $b_0$  pour  $n \geq 0$ .