EISTI
Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Devoir Surveillé

Algèbre

16/11/2007

2 heure

Documents non autorisés,
Calculatrice non autorisée.

Questions de cours: (3 points)

1. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable.
2. Soit $f \in L_K(E)$. Enoncer les propriétés équivalentes à la propriété de diagonalisabilité de f.

Exercice 1: (7 points)

Soit la matrice carrée:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

1. Exprimer l'endomorphisme associé à la matrice A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A.
3. En déduire que la matrice A est trigonalisable.
4. On note par M la matrice triangulaire supérieure associée à f dans la nouvelle base $B=\{v_1,v_2,v_3\}$.
   i. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base B en fonction des composantes de M.
   ii. Déterminer un choix pour les vecteurs v_1, v_2 et v_3.
   iii. Déduire la matrice M semblable à A dans la base B et la matrice de passage P de la base canonique B_0 à la base B.

Exercice 2: (10 points)

On considère la suite réelle $(u_n)_n$ définie par:

$$u_{n+3} = -3u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n \quad (u_0, u_1, u_2 \text{ sont donnés})$$

On pose $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix}$

1. Ecrire X_{n+1} puis montrer qu'il existe une matrice A telle que $X_{n+1}=AX_n$.
2. Donner la relation entre X_n, X_0 et A^n.
3. Calculer le polynôme caractéristique, puis l'écrire sous forme de produit de facteurs irréductibles.
4. A est-elle diagonalisable? Justifier. Si oui, diagonaliser A.
5. Calculer A^n
6. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de n.
7. Préciser la suite vérifiant: $\begin{cases} u_{n+3} = -3u_{n+2} + u_{n+1} + 3u_n \\ u_0 = 1,\ u_1 = 0 \text{ et } u_2 = -1\end{cases}$