EISTI
Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Devoir Surveillé

Algèbre 07/12/2007

2 heures

Documents non autorisés,
Calculatrice non autorisée.

Questions de cours:

Enoncer et démontrer le théorème des noyaux.

Exercice 1:

Soit la matrice carrée:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable? (justifier sans calcul des espaces propres)
2. Montrer qu'on peut trouver une matrice N nilpotente telle que: $A = \lambda I_3 + N$, puis que

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\left(I_3+t\,N+\frac{t^2N^2}{2}\right).$$

3. Résoudre le système $\begin{cases} X'(t)=A\,X(t) \\ X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

Exercice 2:

Soit la matrice carrée:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad où \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

En discutant selon les valeurs de α, donner une réduite de Jordan et déterminer à chaque fois la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres.

Exercice 3:

Soit $A \in \mathcal{M}_{10}(K)$. On suppose que

$$\chi_A(X)=(X^2-2X+1)^2(X-2)^2\,(x-3)^4 \text{ et } m_A(X)=(X^2-2X+1)(X-2)(x-3)^3.$$

a) Que peut-on dire des dimensions des espaces propres?
b) Quelles sont les formes de Jordan possibles?

Exercice 4:

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait que $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\,tr(A)\,\lambda^{n-1}+....+det(A)$.

En utilisant cette égalité à l'ordre n = 2, déterminer toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{K})$ telles que

$$A^3-8A^2+21A-18\,I=0.$$