RAPPELS SUR LES MATRICES

Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.

- On suppose que E est de dimension $p\geq 1$, muni d'une base $(e_1,\ldots,e_p)$.
- On suppose que F est de dimension $n\geq 1$, muni d'une base $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$.

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors on détermine la matrice associée à f par

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

Opérations sur les matrices

On note A et B les matrices associées à f et g (dans les bases mêmes bases)

- $(A+B)$ est associée à l'application linéaire $f+g$
- (αA) est associée à l'application linéaire αf
- AB est associée à l'application linéaire $f\circ g$

Attention la produit matriciel n'est pas commutatif.

Structure des espaces de matrices

- $(\mathsf{M}_{n,p}(K),+)$ est un groupe commutatif avec pour élément neutre la matrice nulle.
- $\mathsf{M}_{n,p}(K)$ muni de + et du produit externe est un K-espace vectoriel.
- $(\mathsf{M}_n(K),+,.)$ est un anneau non commutatif avec pour élément unité la matrice identité.

Interprétation de la matrice associée à une application linéaire

On note $A\in \mathsf{M}_{n,p}(K)$ la matrice associée à une application linéaire f de E dans F.

Soient x un vecteur de E de coordonnées X et y un vecteur de F de coordonnées Y.

$y = f(x) \Leftrightarrow Y=AX$

Notamment, $x\in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow AX=0$.

Imf est engendré par les colonnes de A

Transposition

Soient $A\in \mathsf{M}_{p,n}(K)$ et $B\in \mathsf{M}_{n,q}(K)$. On a

- $\forall(\alpha,\beta)\in K^2\ {}^t(\alpha A+\beta B)=\alpha{}^tA+\beta{}^tB$
- ${}^t({}^tA)=A$
- $\forall k\in \mathbb{N}$, ${}^t(A^k)=({}^tA)^k$
- ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ (Attention à l'ordre !).

Matrices inversibles (uniquement pour les matrices carrées)

Soit $A\in \mathsf{M}_n(K)$. A est inversible si et seulement si

- soit $\exists B\in \mathsf{M}_n(K)$, $AB=I_n$ ou $BA=I_n$ et alors $A^{-1}=B$
- $\det(A)\neq 0$

Soient A et B des matrices inversibles d'ordre n

- AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (Attention à l'ordre !)
- ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

Si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{co}(A)$

Trace d'une matrice

Soient $A\in \mathsf{M}_n(K)$, $B\in \mathsf{M}_n(K)$ et $\alpha\in K$.

- $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$

- $tr(\alpha A)=\alpha tr(A)$
- $tr(AB)=tr(BA)$

Déterminant

$Det(AB)=det(A)det(B)$ / $det(A^p)=(detA)^p$ où p est un entier.
Si A est inversible alors $det(A^{-1})=(detA)^{-1}$.
$det({}^tA)=detA$.
Attention $det(A+B)\neq det(A)+det(B)$ et $det(\alpha A)=\alpha^n det(A)$

Matrices diagonales

Soient $D=diag(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $D'=diag(\beta_1,\dots,\beta_n)$.

- $tr(D)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ et $det(D)=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$ (idem matrices triangulaires)
- $DD'=D'D=diag(\alpha_1\beta_1,\dots,\alpha_n\beta_n)$.
- Si $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $\alpha_i\neq 0$, alors D est inversible et $D^{-1}=diag(\frac{1}{\alpha_1},\dots,\frac{1}{\alpha_n})$.

Matrices symétriques

Soit $A\in M_n(K)$. On dit que A est

- *symétrique* si ${}^tA=A$ / $S_n(K)$
- *antisymétrique* si ${}^tA=-A$ / $A_n(K)$

Il faut savoir démontrer que $M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$

Matrice nilpotente

f est nilpotente d'ordre n $\Leftrightarrow$ A est nilpotente d'ordre n ($A^n=0$)

Changement de base

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n\geq 1$. Soient $E=(e_1,\dots,e_n)$ et $E'=(e_1',\dots,e_n')$ deux bases de E. On définit la *matrice de passage* de la base E à la base E' par la matrice de $M_n(K)$, par

$$P_{EE'}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} e_1' & & e_j' & & e_n' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{ni} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_i \\ \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Soient $E=(e_1,\dots,e_n)$, $E'=(e_1',\dots,e_n')$ et $E''=(e_1'',\dots,e_n'')$ trois bases de E.

- La matrice $P_{EE'}$ est inversible et son inverse correspond à la matrice de passage de la base E' à la base E, $P_{EE'}^{-1}=P_{E'E}$.
- Le produit des matrices de passage de E à E' et E' à E'' correspond à la matrice de passage de E à E'', $P_{EE'}P_{E'E''}=P_{EE''}$.

Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base E et $(x_1',\dots,x_n')$ dans la base E' : $X=P_{EE'}X'$

Soient f un endomorphisme de E, on note A la matrice associée à f dans la base E et A' dans la base E' : $A'=P_{EE'}AP_{E'E}$.

Rang d'une matrice

On note $C_1,\dots,C_p$ les p vecteurs colonnes de A et $L_1,\dots,L_n$ les n vecteurs lignes de A.

- $rg(A)=rg(\{C_1,\dots,C_p\})=rg(\{L_1,\dots,L_n\})\leq inf(p,m)$

- $rg(A)=0$ si et seulement si A est la matrice nulle.

Soit $f \in L(E,F)$ dont la matrice associée (relativement à deux bases) est notée $A \in M_{n,p}(K)$.

- $rg(f)=rg(A)$
- $rg(A)=n \Leftrightarrow$ f est surjective / $rg(A)=p \Leftrightarrow$ f est injective