EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

TD 3

Nisrine Fortin-Camdavant
Algèbre

Exercice 1:

Soit A $\in M_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$

1) Comparer les valeurs propres de M et de A.
2) Soit P $\in \mathbb{K}[X]$ et Q = XP′. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$
3) A quelle condition sur A, M est diagonalisable?

Exercice 2:

Soit A $\in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer le spectre de B en fonction des valeurs propres de A.

Exercice 3:

Soit A $\in M_n(\mathbb{K})$ inversible et B = A^{-1}, C = A^2. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B et χ_C en fonction de χ_A

Exercice 4:

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ n éléments de $\mathbb{K}$, on note la matrice $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice.
2. En déduire que pour tout polynôme P(X) appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et s'écrivant sous la forme, $P(X) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$ il existe une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ telle que le polynôme P(X) soit le polynôme caractéristique de M.
3. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 1$.

   Déterminer la matrice M de $M_4(\mathbb{R})$ telle que le polynôme P(X) soit le polynôme caractéristique de M.

Exercice 5:

On considère l'endomorphisme *f* de $M_4(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & k & 2 \end{pmatrix}$$

Quelle condition nécessaire et suffisante les réels a, b, c, d, e, k doivent-ils vérifier pour que f soit diagonalisable?