



T.D. n°3

Changement de base

EXERCICE 1:

- a. Soient $e'_1=(4,-3,-2)$, $e'_2=(4,0,-1)$ et $e'_3=(2,1,0)$. Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
Donner la matrice de passage de la base canonique dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ainsi que la matrice de passage de la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ dans la base canonique. Vérifier que l'une est l'inverse de l'autre et réciproquement.
- b. Soient $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(1,-1,0)$, $e_3=(1,1,1)$, $f_1=(0,1,1)$, $f_2=(1,0,1)$, $f_3=(1,1,0)$.
Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, f_3\}$ sont des bases de \mathbb{R}^3 et donner les matrices de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{f_1, f_2, f_3\}$ et de $\{f_1, f_2, f_3\}$ à $\{e_1, e_2, e_3\}$.

EXERCICE 2

On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, $E = \mathbb{R}_2[X]$ que l'on munit de sa base canonique B .

- 1) On note G le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, $G = \mathbb{R}_1[X]$, et F le sous-ensemble de E défini par
- $$F = \{P \in E : P = a(X-1)^2, a \in \mathbb{R}\}$$
- a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
b) Montrer que $E = F \oplus G$
- 2) On considère les polynômes suivants
 $P_1=2$ $P_2=X+2$ $P_3=(X+2)^2$
 a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de E .
 b) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de E .
- 3) On note alors B' la nouvelle base formée par (P_1, P_2, P_3) .
- i) Donner la matrice de passage $P = P_{BB'}$ de la base canonique B à la base B' .
- ii) On considère le polynôme Q de E donné par $Q=7X^2+15X+10$. A l'aide de la matrice P^{-1} , déterminer les coordonnées de Q dans la base B' , i.e écrire Q sous la forme $Q=a(X+2)^2+b(X+2)+c$.
- iii) On note f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base canonique B est égale à $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donner la matrice A' associée à f relativement à la base B' .
- iv) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer $(A')^n$ et en déduire A^n . A quel endomorphisme est associée la matrice A^n ?

EXERCICE 3

Soit f l'application linéaire définie par:

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto f(x) = (x_1 - x_2, x_3 - x_4, 0)$$

Soit B_1, B_2 les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 . On note $B_3 = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ une nouvelle base de \mathbb{R}^3 , avec :

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (0, 1, 1)$$

Calculer les matrices suivantes : $A_1 = [f]_{B_1, B_2}$ et $A_2 = [f]_{B_1, B_3}$

EXERCICE 4

Soit $f : P_3 \rightarrow P_3$ définie par :

$$P \mapsto f(P) = P + (1 - X)P'$$

Soient B_1 la base canonique de P_3 et $B_2 = \{ P_1, P_2, P_3, P_4 \}$ une nouvelle base de P_3 avec :
 $P_1 = 1$; $P_2 = 1 - X$; $P_3 = 1 + X^2$; $P_4 = 1 - X^4$

Calculer les matrices suivantes : $A_1 = [f]_{B_1, B_1}$ et $A_2 = [f]_{B_2, B_1}$

EXERCICE 5

Soit $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ avec $e_i(x) = x^i$ $i=0, 1, 2, 3$. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x \quad f_2(x) = -1 + 2x_2 \quad \text{et} \quad f_3(x) = -3x + 4x_3 \quad (\text{les 4 premiers polynômes de Chebyshev}).$$

- 1) Montrer que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
- 2) Donner la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' ainsi que son inverse est P^{-1} .
- 3) On considère l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_3[x]$ défini par : $\forall p \in \mathbb{R}_3[x] \quad T(p) = p'$
 - a) Donner la matrice représentative de T relativement à la base \mathcal{B} .
 - b) En déduire la matrice représentative de T relativement à la base \mathcal{B}' .

EXERCICE 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice, dans la base canonique \mathcal{B} , d'un endomorphisme f de \mathbb{R}^2 . Soit $\mathcal{B}' = \{ e'_1, e'_2 \}$ où $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (2, 1)$ une autre base de \mathbb{R}^2 .

- 1) Donner la matrice de passage P ainsi que P^{-1} . En déduire la matrice B de f dans la base \mathcal{B}' .
- 2) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Application :

Soient α et β deux réels non nuls et $E_{\alpha, \beta}$ l'espace vectoriel (de dimension 2) des suites (u_n) numériques réelles vérifiant, pour $n \geq 1$, la relation : (*) $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ avec $u_1 = a$ et $u_0 = b$ donnés.

- 1) Vérifier qu'on peut écrire la relation (*) sous la forme : $T_{n+1} = AT_n$ avec $T_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{En déduire que: } T_{n+1} = A^n T_1$$

- 2) Ecrire sous cette forme la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ avec $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.
- 3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE 7

Soit E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels munis respectivement des bases :

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ et soit T un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ dont la matrice relativement aux bases \mathcal{B} et

$$\mathcal{B}' \text{ est: } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer une nouvelle base de F pour laquelle la matrice A' associée à T est ligne réduite échelonnée.
- 2) En déduire la matrice de changement de base P telle que $A' = P.A$ (faire un diagramme)

EXERCICE 8

Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 - 5u + 6Id = 0$ où $u^2 = u \circ u$; Id est l'application identique de E et 0 l'application identiquement nulle de E dans E . On considère les deux endomorphismes p et q de E définis par : $p = u - 2Id$ et $q = Id - p$.

- 1) Montrer que p et q sont des projecteurs ($p^2 = p$ et $q^2 = q$)
- 2) Calculer poq ; qop et $p+q$
- 3) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit u l'endomorphisme de E dont la

$$\text{matrice dans la base } \mathcal{B} \text{ est } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que p et q , définis comme précédemment, sont des projecteurs.
- b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de p et q
- c) On considère les trois vecteurs $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$; $f_2 = -e_1 + e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_3$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E et donner la matrice B de u dans cette base \mathcal{B}' .
Calculer B^n et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Donner la matrice de p et de q dans la base \mathcal{B}' .

EXERCICE 9

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$

où $\forall x \in \mathbb{R}, e_i(x) = x^i, i=0,1,2,3$ et soit a_0, a_1, a_2 et a_3 4 réels distincts. On considère les quatre polynômes:

$$P_0(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} \quad P_1(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} \quad P_3(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

- 1) Vérifier que $P_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $P_i(a_i) = 1$ si $i = j$
- 2) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
- 3) Donner la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B}

$$4) \text{ En déduire que la matrice } Q = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

- 5) Donner les composantes d'un polynôme quelconque $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base \mathcal{B}' .