



T.D. n°4

Réduction des endomorphismes, applications

EXERCICE 1

- 1) Montrer que si λ est valeur propre d'une matrice A alors pour tout entier positif k , λ^k est valeur propre de A^k .
- 2) Soit A une matrice inversible. Montrer que si λ est valeur propre de A alors λ^{-1} est valeur propre de A^{-1} .
- 3) Soit A une matrice carrée complexe nilpotente d'ordre p et $A^{p-1} \neq 0$. Déterminer les valeurs propres et le polynôme caractéristique de A .
En déduire la valeur du déterminant de $A + 3I$.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{C} . On considère f et g deux endomorphismes de E .

- 1) On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g .
- 2) On suppose maintenant que f et g ont chacune n valeurs propres distinctes. Montrer l'équivalence des deux conditions:
 - a) $f \circ g = g \circ f$
 - b) f et g ont les mêmes vecteurs propres.

EXERCICE 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(K)$. Montrer que A et A^t ont les mêmes valeurs propres.
2. Pour $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que A et A^t ont les mêmes valeurs propres.
- b) Déterminer les vecteurs propres de A et A^t .
- c) Déduire.

EXERCICE 4:

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m . Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1} .

EXERCICE 5

- 1) Etudier les valeurs propres, les vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où elles sont diagonalisables, indiquer la forme diagonale et une matrice de passage, lorsqu'elles ne le sont pas, indiquer une base dans laquelle elles s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2) Même question pour

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner la forme réduite de chacune d'elles, ainsi que les matrices de passage.

EXERCICE 7

Etudier la diagonalisation de la matrice:

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 2\alpha \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 ayant pour matrice A dans la

base canonique B de \mathbb{R}^3 .

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .

2. Trouver une base B' de \mathbb{R}^3 telle que $Mat(f, B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Soit $g \in L(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\text{Ker}(f-2 \text{Id})$ et $\text{Ker}(f-\text{Id})^2$ sont laissés stables par g .

4. En déduire que la matrice de g dans B' est de la forme $Mat(g, B') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

EXERCICE 9

soient A et P les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.

- calculer les valeurs propres de A .
- vérifier que les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A .
- calculer ${}^t P P$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
- Sans effectuer de calcul, montrer que ${}^t P A P$ est une matrice diagonale, que

l'on notera D . déterminer D .

2. on note B la matrice $B = \delta A + I$, où est δ un paramètre réel fixé.

- a) Montrer que la matrice 1PBP est une matrice diagonale. On la note Δ .
 b) quelles sont les valeurs propres de B ?

c) La matrice Δ^n est une matrice diagonale notée
$$\begin{pmatrix} \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & \beta_n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}$$

calculer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n et de δ .

d) déterminer l'expression de B^n en fonction de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

e) pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, un vecteur déterminé par la relation de

réurrence:
$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = BU_n. \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \geq 0, U_n = B^n U_0$.

En déduire l'expression de U_n en fonction de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

EXERCICE 10

On cherche à résoudre le système différentiel (S) suivant:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) \end{cases}$$

1. Poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et exprimer la matrice A telle que $Y' = AY$.
2. Déterminer la matrice diagonale D telle que $Y' = AY$.
3. Poser $Z = P^{-1}Y$ et exprimer l'équation dont Z est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire la solution du système (S).