EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Correction DM 1

Algèbre
Matrices: déterminant-rang-systèmes

22/02/2008

EXERCICE 1:

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $J=A-I_3$.

1) Montrer que J est nilpotente.

2) En utilisant la formule du binôme, calculer A^n, $\forall n\in \mathbb{N}^*$.

3) On considère le système récurrent suivant:(S) $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} = -4u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$

On pose $U_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer (S) sous forme matricielle.

4) Supposons que $U_{n+1} = AU_n$, vérifier que $U_n = A^nU_0$.

5) Pour $U_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \\ w_0 = 2 \end{cases}$. Exprimer les suites u_n, v_n et w_n en fonction de n.

EXERCICE 2

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on note $M_{(a,b)}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer la matrice $M_{(a,b)}$ en fonction de la matrice identité I_3 et d'une matrice A indépendante de a et b.

2) a. Déterminer le rang de la matrice A.

b. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

3) a. Montrer que l'ensemble E des matrices $M_{(a,b)}$ quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, muni des opérations usuelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base de E.

b. Déterminer toutes les matrices de E de la forme $M^2=I_3$.

CORRECTION

EXERCICE 1

1. On a $J = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. donc J est nilpotente.

2. On $A=J+I_3$. I_3 et J commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme pour développer A^n.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k J^k I_3^{n-k} = C_n^0 I_3 + C_n^1 J + C_n^2 J^2 = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} n^2-3n+1 & -n & n(n-1)/2 \\ n(n+1) & 1+2n & -n^2 \\ -2n(n+1) & -2n & n^2-n+1 \end{pmatrix}$$

3. Exprimer (S) sous forme matricielle: $U_{n+1}=AU_n$

4. On obtient le système récurrent suivant:

$$\begin{cases} U_{n+1} = AU_n \\ U_0 \end{cases}, \text{ où } U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ et } U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

donc $U_{n+1}=A^2U_{n-1}$, de proche en proche, on obtien $U_{n+1}=A^{n+1}U_0$.

5. $U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} n^2-3n+1 & -n & n(n-1)/2 \\ n(n+1) & 1+2n & -n^2 \\ -2n(n+1) & -2n & n^2-n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n^2-3n+1 \\ -(n^2+n+1) \\ -2(n-1) \end{pmatrix}$ $\qquad U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\begin{cases} u_n = 2n^2 - 3n + 1 \\ v_n = -(n^2+n+1) \\ w_n = -2(n-1) \end{cases}.$$

Les trois suites sont toutes divergentes.

EXERCICE 2

1. $M_{(a,b)} = aI_3 + bA$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. a- On peut remarquer directement que le rang de a est 3 puisque les 3 lignes sont linéairement indépendantes. Sinon par opérations élémentaires, on obtient

$$rg(A) \overset{\text{permutation des colonnes}}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

b- A est de plein rang donc elle est inversible. Pour calculer son inverse, on peut soit continuer les transformations sur A jusqu'à obtenir la matrice identité (une transformation supplémentaire est suffisante) puis répercuter ses transformations sur la matrice identité, soit passer pas la matrice des cofacteurs.

D'après les transformations utilisées pour calculer le rang de A, on déduit que le déterminant de a est le produit de la diagonale de la dernière transformation, *i.e* det(A)=2. On a de plus

$$co(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t co(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice nulle appartient à E avec a=0 et b=0. Soient $M_{(a,b)} \in E$, $M_{(c,d)} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $M_{(a,b)}+M_{(c,d)}=M_{(a+c,b+d)} \in E$ et $\alpha M_{(a,b)}=M_{(\alpha a,\alpha b)} \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Toutes les matrices de E sont de la forme aI_3+bA, donc $\{I_3,A\}$ est une famille génératrice de E. Il est immédiat de voir que ces deux matrices sont linéairement indépendantes. E est donc un espace de dimension 2, de base $\{I_3,A\}$.

4. On remarque tout d'abord que $A^2=2I_3+A$.

   $M^2=I_3 \Leftrightarrow a^2I_3+2abJ+b^2J^2=I_3$ (car I_3 et A commutent) $\Leftrightarrow I_3(a^2+2b^2)+A(2ab+b^2)=I_3$.

   Comme $\{I_3,A\}$ est une base, on en déduit le système

$$\begin{cases} a^2+2b^2=1 \\ 2ab+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2b^2=1 \\ b(2a+b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1/3 \\ b=-2/3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-1/3 \\ b=2/3 \end{cases}.$$

   Donc les matrices de E qui vérifient $M^2=I_3$ sont les matrices,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$