EISTI
Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Devoir Surveillé 3

correction
Algèbre

07/12/2007

2 heure

Documents non autorisés,
Calculatrice non autorisée.

EXERCICE 2:

Soit la matrice carrée:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad où \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

En discutant selon les valeurs de α, donner une réduite de Jordan et déterminer à chaque fois la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres.

CORRECTION

EXERCICE 4:

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait que $\forall \ \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n +(-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)\, \lambda^{n-1} +....+\det(A)$.

En utilisant cette égalité à l'ordre n = 2, déterminer toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{K})$ telles que

$$A^3 -8A^2 +21A -18\ I =0.$$

CORRECTION

Exercice 1:

Soit la matrice carrée:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable? (justifier sans calcul des espaces propres).
2. Montrer qu'on peut trouver une matrice N nilpotente telle que: $A = \lambda I_3 + N$, puis que
$$e^{tA}=e^{\lambda t}\left(I_3+tN+\frac{t^2N^2}{2}\right).$$
3. Résoudre le système $\begin{cases} X'(t)=AX(t) \\ X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

CORRECTION:

1. $\chi_A(x)=\det(A-xI_3)=\begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ 5 & -3-x & 3 \\ -1 & 0 & -2-x \end{vmatrix}=-(x+1)^3.$

 -1 est la seule valeur propre de A d'ordre de multiplicité 3.

 A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple: $m_A(x)=x+1$.

 D'après Cayley-Hamilton, on doit avoir $m_A(A) = 0$. Or $m_A(A) = A+I=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\neq 0_3$

 Conclusion: A n'est pas diagonalisable.

2. $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=N.$

 $$N^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

 $$N^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Donc N est nilpotente.

 $e^{tA}=e^{t(-I+N)}$ Et puisque I et N commutent alors $e^{tA}=e^{-tI}e^{tN}$

 Par définition $e^{tN}=\sum_{k\geq 0}\frac{t^kN^k}{k!}$ et comme $N^k = 0_3$ pour $k \geq 3$ alors $e^{tN}=I_3+tN+\frac{t^2N^2}{2}$.

 $$e^{-tI_3}=e^{-t}I_3 \Rightarrow e^{tA}=e^{-t}I_3\left(I_3+tN+\frac{t^2N^2}{2}\right)=e^{-t}\left(I_3+tN+\frac{t^2N^2}{2}\right)$$

3. $\begin{cases} X'(t)=AX(t) \\ X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

 a) Soit on utilise la méthode du cours, le polynôme caractéristique de A est scindé, donc A est trigonalisable, on calcule la matrice de passage P puis son inverse et .....

b) Soit on utilise la propriété suivante:

$$X'(t)=A\,X(t)$$
$$X(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow X(t) = e^{tA}X(0);$$ Attention: respecter l'ordre du produit: matrice $e^{tA} \times$ vercteur $X(0)$ conditions initiales.

Cette méthode est souvent utilisée lorsque la matrice e^{tA} est déjà calculée et son expression est facile à être utilisée!!!

En conclusion: $X(t)=e^{tA}X(0)=e^{\lambda t}\left(I_3+tN+\dfrac{t^2N^2}{2}\right)X(0).$

$$I_3+tN+\frac{t^2N^2}{2} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3t&-t&2t\\5t&-2t&3t\\-t&0&-t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2&-\frac{1}{2}t^2&\frac{1}{2}t^2\\t^2&-\frac{1}{2}t^2&\frac{1}{2}t^2\\-t^2&\frac{1}{2}t^2&-\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3t+t^2&-t-\frac{1}{2}t^2&2t+\frac{1}{2}t^2\\5t+t^2&1-2t-\frac{1}{2}t^2&3t+\frac{1}{2}t^2\\-t-t^2&\frac{1}{2}t^2&1-t-\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}$$

$$\left(I_3+tN+\frac{t^2N^2}{2}\right)X(0) = \begin{pmatrix}1+3t+t^2&-t-\frac{1}{2}t^2&2t+\frac{1}{2}t^2\\5t+t^2&1-2t-\frac{1}{2}t^2&3t+\frac{1}{2}t^2\\-t-t^2&\frac{1}{2}t^2&1-t-\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3t+t^2-t-\frac{1}{2}t^2+2t+\frac{1}{2}t^2\\5t+t^2+1-2t-\frac{1}{2}t^2+3t+\frac{1}{2}t^2\\-t-t^2+\frac{1}{2}t^2+1-t-\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+3t+t^2-t-\frac{1}{2}t^2+2t+\frac{1}{2}t^2\\5t+t^2+1-2t-\frac{1}{2}t^2+3t+\frac{1}{2}t^2\\-t-t^2+\frac{1}{2}t^2+1-t-\frac{1}{2}t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4t+t^2\\1+6t+t^2\\1-2t-t^2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-t}(1+4t+t^2)\\e^{-t}(1+6t+t^2)\\e^{-t}(1-2t-t^2)\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}\left(1+4t+t^2\right)\\ x_2(t) = e^{-t}\left(1+6t+t^2\right)\\ x_3(t) = e^{-t}\left(1-2t-t^2\right)\end{cases}$$