EISTI

Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

QUESTIONS DE COURS

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E.

1.
2.
3. Soient A et B $\in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

   $\chi_A(x) = \det(A-xI_n) = \det(P^{-1}BP - xI_n) = \det(P^{-1}(B - xI_n)P) = \det(P^{-1})\det(B - xI_n)\det(P)$.

   Or $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$ donc $\chi_A(x) = \det(B-xI_n) = \chi_B(x)$.

EXERCICE 1:(les parties I et II sont indépendantes)

Partie I

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f: $E \to F$ une application linéaire. On définit la transposée de f notée ${}^t\!f$ l'application de F^* dans E^* définie par:

$$\forall \psi \in F^*, \quad {}^t\!f(\psi) = \psi \circ f.$$

a) Montrer que ${}^t\!f$ applique bien F^* dans E^*. (Indication: montrer que $\psi \circ f$ est une forme linéaire de E)

b) Montrer que ${}^t\!f$ est une application linéaire.

c) Vérifier les relations suivantes:

   i. ${}^t(f+g) = {}^t\!f + {}^t\!g$

   ii. ${}^t(f \circ g) = {}^t\!g \circ {}^t\!f$

CORRECTION PARTIE I:

a) Soit $\psi \in F^* \Rightarrow \psi \in \mathcal{L}(F,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ donc d'après les propréités des applications linéaires $\psi \circ f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$. Donc ${}^t\!f$ applique bien F^* dans E^*.

b) facile.

c) Vérifier les relations suivantes:

   i. Soit $\psi \in F^*$, ${}^t(f+g)(\psi) = \psi \circ (f+g) = \psi \circ f + \psi \circ g = {}^t\!f(\psi) + {}^t\!g(\psi) \Rightarrow {}^t(f+g) = {}^t\!f + {}^t\!g$

ii. Soit $\psi \in F^*$,

$$^t(f \circ g)(\psi) = \psi \circ (f \circ g) = (\psi \circ f) \circ g = {}^tg(\psi \circ f) = {}^tg({}^tf(\psi)) = {}^tg \circ {}^tf(\psi)$$

$$\Rightarrow {}^t(f \circ g) = {}^tg \circ {}^tf$$

Partie II

1) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, par:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = x + \alpha y + \beta z \\ \varphi_2(x, y, z) = \alpha x + \alpha^2 y + z \\ \varphi_3(x, y, z) = \beta x + y + \alpha^2 z \end{cases}$$

a) Les applications φ_i, $i=1, 2, 3$ sont des formes linéaires en effet:

➔ Soit $a \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$,

$\varphi_1[a(x, y, z) + (x',y',z')] = \varphi_1(ax + x', ay + y', az + z') = (ax + x') + \alpha(ay+y') + \beta(az+z')$
$= a(x + \alpha y + \beta z') + x' + \alpha y' + \beta z' = a\,\varphi_1(x, y, z) + \varphi_1(x',y',z')$.

➔ idem pour φ_2 et φ_3.

b) Pour que $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit une famille libre, pour cela, il faut et il suffit que $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -(1-\alpha\beta)^2 \neq 0$ donc la CNS est $1 \neq \alpha\beta$

c) Lorsque $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, on note $\mathcal{B}$ la base préduale de $\mathcal{F}$,

$\mathcal{Q} = \text{Pass}(\mathcal{B}^*_0, \mathcal{F})$, $\mathcal{P} = \text{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})$, on a: $Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$

$$P = {}^tQ^{-1} = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2} \begin{pmatrix} 1-\alpha^4 & \alpha^3-\beta & -\alpha \\ \alpha^3-\beta & \beta^2-\alpha^2 & 1 \\ -\alpha(1-\alpha\beta) & 1-\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

La base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est (V_1, V_2, V_3), où

$$V_1 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(1-\alpha^4,\ \alpha^3-\beta,\ -\alpha(1-\alpha\beta)\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(\alpha^3-\beta,\ \beta^2-\alpha^{2,}\ 1-\alpha\beta\right),$$

$$V_3 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(-\alpha,\ 1,\ 0\right).$$

2) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs:

$V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (0,1,1,1)$, $V_3 = (0,0,1,1)$ et $V_4 = (0,0,0,1)$.

i. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ car c'est une matrice triangulaire donc $\mathcal{B}=\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$

est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et puisque card($\mathcal{B}$) = 4 = dim $\mathbb{R}^4$ alors $\mathcal{B}$ forme une base

de $\mathbb{R}^4$.

ii. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, on note $\mathcal{B}_0=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la

matrice de passage de $\mathcal{B}_0=\{e^*_1,e^*_2,e^*_3 ,e^*_4\}$ à $\mathcal{B}^*_0=\{V^*_1,V^*_2,V^*_3 ,V^*_4\}$ est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conclut que V^*_1,V^*_2,V^*_3 et V^*_4 sont les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ définies par:

$$\forall (x_1, x_2, x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} V^*_1(x_1, x_2, x_3,x_4) = x_1 \\ V^*_2(x_1, x_2, x_3,x_4) = -x_1 + x_2 \\ V^*_3(x_1, x_2, x_3,x_4) = -x_2 + x_3 \\ V^*_4(x_1, x_2, x_3,x_4) = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

La base duale de $\mathcal{B}$est donnée par $\mathcal{B}^*_0=\{V^*_1,V^*_2,V^*_3 ,V^*_4\}$.

EXERXICE 4:

Dans l'espace $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère (O,i,j,k), on donne :

$$(D) : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{et } (D') : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

(1) En prenant $z = \lambda$, donner la représentation paramétrique de (D).

$$(D) \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 2 + z \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow (D) \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

la droite (D) passe par le point A(1,2,0) et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) En prenant z = µ, donner la représentation paramétrique de (D').

$$(D'):\begin{cases} x = \dfrac{2+a}{3} - \dfrac{4}{3}z \\ y = \dfrac{1-a}{3} + \dfrac{1}{3}z \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow (D'):\begin{cases} x = \dfrac{2+a}{3} - \dfrac{4}{3}\mu \\ y = \dfrac{1-a}{3} + \dfrac{1}{3}\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

La droite (D') passe par le point $B\begin{pmatrix} \dfrac{2+a}{3} & \dfrac{1-a}{3} & 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) Pour quelles valeurs de a, (D) et (D′) sont-elles coplanaires ?

On commence par montrer si les deux droites sont linéaires, pour cela, on calcule le produit vectoriel de u et v et on obtient:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{10}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ donc les vecteurs u et v sont non colinéaires. Par conséquent, elles sont soit séquantes soit non coplanaires.

Elle sont séquantes si elles se coupent en un point M(x,y,z) vérifiant les deux représentations paramétriques de (D) et (D').

On cherche la valeur de a pour laquelle les deux droites sont coplanaires, donc séquantes puisqu'elles ne sont pas parallèles.

$$(D\cap D'):\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = \lambda \\ 1+2\lambda = \dfrac{2+a}{3} - \dfrac{4}{3}\mu \\ 2+\lambda = \dfrac{1-a}{3} + \dfrac{1}{3}\mu \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2\lambda = \dfrac{2+a}{3} - \dfrac{4}{3}\lambda \\ 2+\lambda = \dfrac{1-a}{3} + \dfrac{1}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{2+a}{3} = -2\lambda - \dfrac{4}{3}\lambda \\ 2 - \dfrac{1-a}{3} = -\lambda + \dfrac{1}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ a = -4 \end{cases}$$

Donc pour a=-4, les droites (D) et (D') se coupent au point M de coordonnées M(0, 3/2, -1/2).

(4) Pour a = -4, les droites (D) et (D') sont coplanaires et l’´equation du plan contenant (D) et (D′) est donnée par:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -\frac{4}{3} \\ y-\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ z+\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ donc (P) : x – 5y + 3 z +9 =0.