EISTI

Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Algèbre et Géométrie

Dualité

Nisrine Fortin-Camdavant

1. Dualité

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

A- Formes linéaires, espace dual

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition:

> Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
>
> On note E* l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E, c'est-à-dire $L(E, \mathbb{K})$.
>
> E est appelé le dual de E: il possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples

a) Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues sur le segment [a, b], à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application $\varphi : f \to \int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire sur E.

b) Sot $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications d'un ensemble X non vide vers $\mathbb{K}$.

Soit x_0 est un élément particulier de X. L'application $\varphi: f \mapsto f(x_0)$ en x_0 est une forme linéaire sur E.

c) Si $E = M_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'application trace qui à tout M de E associe tr(M) est une forme linéaire sur E.

Remarque

Soit f une forme linéaire sur E. Alors f est soit identiquement nulle, soit surjective.

Proposition

> E* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition (Expression des formes linéaires en dimension finie)

> Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $B=\{ e_1, \dots, e_n\}$.
>
> i. Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.
>
> L'application f_a qui à $u=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ associe $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ est une forme linéaire sur E.
>
> On note qu'avec cette définition on a: $a_i = f_a(e_i)$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.
>
> ii. Réciproquement, soit f une forme linéaire sur E. Alors il existe un vecteur a unique de $\mathbb{K}^n$ tel que $f = f_a$.

Exemple

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications qui s'écrivent $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$, où (a, b, c) est un triplet quelconque de $\mathbb{R}^3$.

B- Hyperplans et formes linéaires

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition:

On appelle hyperplans de E les noyaux des formes linéaires sur E autres que la forme nulle.

Autrement dit, un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si:

$$\exists\, \varphi \in E^* - \{0\},\ H = \mathrm{Ker}(\varphi).$$

On dit que la relation $\varphi(x) = 0$ est une équation de l'hyperplan H.

Proposition

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un vecteur u de $E \setminus H$ et $u \neq 0$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}\, u$.

b) Il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}\, \varphi$.

Si ces conditions sont réalisées, on dit que H est un hyperplan de E.

Preuve

a) $\Rightarrow$ b) supposons qu'il existe $u \in \mathbb{K}$ tel que $u \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}\, u$. Pour tout vecteur x de E, il existe $(\lambda, y) \in \mathbb{K} \times H$ unique tel que $x = \lambda u + y$. Il est clair que l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \to K \\ x \to \lambda \end{array}$ ainsi définie est linéaire. On a alors $\varphi \in E^* - \{0\}$ (car $\varphi(u) \neq 0$) et $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

b) $\Rightarrow$ a) Soit H un hyperplan de E. Il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, puis il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. Nous allons montrer que la droite vectorielle $D = \mathbb{K}\, u$ est supplémentaire de H dans E.

Soit $x \in D \cap H$. Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha u$, et $\varphi(x) = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $\varphi(u) = \frac{1}{\alpha}\varphi(x) = 0$, contradiction. Donc $\alpha = 0$, puis $x = 0$. Ceci montre: $D \cap H = \{0\}$.

Soit $x \in E$. Montrons que'il existe $(\lambda, y) \in \mathbb{K} \times H$ tel que $x = \lambda u + y$. on a

$$x = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u + \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u\right),\quad \text{et comme}\quad \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}\varphi(u) = 0,$$

$x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$. Ceci montre que $D + H = E$.

Finalement $E = H \oplus \mathbb{K}\, u$.

corollaire

Si E est de simension finie n ($n \geq 1$), alors les hyperplans de E sont les sous espaces vectoriels de E de dimension n-1.

Proposition

Soient H un hyperplan de E, $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a:

$$H = \mathrm{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in K - \{0\},\ \psi = \alpha\varphi.$$

Preuve

1) Il est clair que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$:

   $\mathrm{Ker}(\alpha\,\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

2) Réciproquement, soit $\psi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\psi)$. Il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$, et on a:

   $E = \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathbb{K}\,u$.

   Soit $x \in E$; il existe $(\lambda, y) \in \mathbb{K} \times \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\mathrm{Ker}(\varphi) = H = \mathrm{Ker}(\psi)$ tels que $x = y + \lambda u$.

   Alors $\varphi(x) = \lambda\varphi(u)$ et $\psi(x) = \lambda\psi(u)$, d'où $\psi(x) = \dfrac{\psi(u)}{\varphi(u)}\varphi(x)$. En notant $\alpha = \dfrac{\psi(u)}{\varphi(u)} \in \mathbb{K}-\{0\}$, on a donc $\psi = \alpha\,\varphi$.

Remarque

La proposition précédente montre qu'un hyperplan donné n'admet, à un coefficient non nul près, qu'une seule équation.

Définition

> Un sous espace vectoriel F de E est dit de codimension finie si et seulement si F admet au moins un supplémentaire de dimension finie dans E.

Proposition et définition

> Soit F un sous espace vectoriel F de E de codimension finie. Tous les supplémentaires de F dans E sont de dimension finie et ont la même dimension, appelée codimension de F (dans E), et notée codim(F).

Remarque

Les hyperplans sont des sous espaces vectoriels de codimension finie égale à 1

Corollaire

Si E est de dimension finie alors tout sous espace vectoriel F de E est de codimension finie et

$$\mathrm{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$$

C- Orthogonalité

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application $\begin{array}{ccc} E \times E^* & \to & K \\ (x, \varphi) & \to & \varphi(x) \end{array}$ est une forme bilinéaire, appelée crochet de dualité, et noté $\langle . , . \rangle$. Ainsi

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \varphi \in E^*,\ \langle \varphi , x \rangle = \varphi(x).$$

Cette notation pourra éclairer l'étude suivante.

Définition:

1) Pour toute partie A de E, on définit l'orthogonal $A^{\perp}$ de A dans E*:

$$A^{\perp} = \{\varphi \in E^*;\ \forall a \in A,\quad \varphi(a) = 0\}.$$

2) Pour toute partie L de E*, on définit l'orthogonal °L de L dans E:

$$°L = \{x \in E;\ \forall \varphi \in L,\quad \varphi(x) = 0\}.$$

Remarques

1) Pour tout φ de E* et toute partie A de E:

$$\varphi \in A^{\perp} \Leftrightarrow \varphi|_A = 0 \Leftrightarrow A \subset \mathrm{Ker}(\varphi).$$

2) Pour toute partie L de E*: $\quad {}^0L = \bigcap_{\varphi \in L} \mathrm{Ker}(\varphi).$

Proposition

Pour toutes parties A et B de E.

a) $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E*.

b) $\{0_E\}^{\perp} = E^*$.

c) $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$.

d) $A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp}$

Preuve

a) $0_{E^*} \in A^{\perp}$ car: $\forall a \in A,\quad 0_{E^*}(a) = 0$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi, \psi \in A^{\perp}$. On a $\forall a \in A,\quad (\lambda\varphi + \psi)(a) = \lambda\varphi(a) + \psi(a) = 0$, donc $\lambda\varphi + \psi \in A^{\perp}$.

b) $\{0_E\}^{\perp} = \{\varphi \in E^*;\quad a = 0_E,\quad \varphi(0_E) = 0\} = E^*$.

c) $E^{\perp} = \{\varphi \in E^*;\ \forall a \in E,\quad \varphi(a) = 0\} = \{0_{E^*}\}$.

d) Supposons $A \subset B$. Soit $\varphi \in B^{\perp}$; on a $(\forall b \in A,\ \varphi(b) = 0)$, donc $(\forall a \in A \subset B,\ \varphi(a) = 0)$, c'est à dire que $\varphi \in A^{\perp}$.

Proposition

Pour toutes parties L et M de E*.

a) °L est un sous espace vectoriel de E.

b) $°\{0_{E^*}\} = E$.

c) $°(E^*) \supset \{0_E\}$.

d) $L \subset M \Rightarrow °L \supset °M$

Proposition

Pour tous sous espaces vectoriels A , B de E.

a) $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

b) $(A \cap B)^{\perp} \supset A^{\perp} + B^{\perp}$.

c) $°(A^{\perp}) \supset A$.

Proposition

Pour tous sous espaces vectoriels L et M de E*.

a) $°(L+M) = °L \cap °M$.

b) $°(L \cap M) = \supset° L + °M$.

c) $(° L)^{\perp} \supset L$.

D- Bases duales

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim(E) \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots , e_n\}$.

Théorème et définition

Pour tout i de $\{1, \dots , n\}$, on note e^*_i la forme linéaire définie sur E par:

$$\forall\, j \in \{1,\dots,n\}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La famille $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ est une base de E, appelée base duale de la base $\mathcal{B}$, et notée $\mathcal{B}^*$.

δ_{ij} est appelé le symbole de Kronecker.

Preuve

Les e_i^* ($1 \leq i \leq n$) sont des éléments de E*. Soient $\varphi \in E^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\forall\, j \in \{1,\dots,n\}, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \right)(e_j) = \varphi(e_j) \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\forall\, j \in \{1,\dots,n\} \quad \lambda_j = \varphi(e_j) \right) \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ est une base de E*, et de plus $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

Corollaire

E* est de dimension finie, et $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Proposition

Soient $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots , e_n\}$ une base de E, $\mathcal{B}^* = \{ e^*_1, \dots , e^*_n\}$ sa duale. On a:

1) $\forall \varphi \in E^*$, $\quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

2) $\forall x \in E$, $\quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$

Remarque

Soient $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots , e_n\}$ une base de E, $\mathcal{B}^* = \{ e^*_1, \dots , e^*_n\}$ sa duale. On a, pour tout $x \in E$ et tout $\varphi \in E^*$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \varphi \rangle e_i^*, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i^* \rangle e_i, \qquad \langle x, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i^* \rangle \langle e_i, \varphi \rangle.$$

Proposition

Soient $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, $\mathcal{B}^* = \{ e^*_1, \dots, e^*_n\}$ sa duale, $x \in E$, $\varphi \in E^*$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)$. On a alors $\varphi(x) = {}^tUX$.

Preuve

Comme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$, on a: $U = \mathrm{Mat}_{B^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix}$. En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \left(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^tUX.$$

Proposition (Changement de base pour la dualité)

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est ${}^tP^{-1}$.

Preuve

Notons $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}' = \{ f_1, \dots, f_n\}$, $P = (p_{ij})_{ij}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et $Q = (q_{ij})_{ij}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$. On a pour tout (j,k) de $\{1, ..., n\}^2$:

$$\delta_{ij} = f_j^*(f_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij} e_i^*\right)\left(\sum_{l=1}^{n} p_{lk} e_l\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} q_{ij} p_{lk} \delta_{il} = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} p_{ik}.$$

Ceci montre que ${}^tQP = I_n$, donc $Q = {}^tP^{-1}$.

Exemple

Montrer que les vecteurs $V_1 = (2,1,4)$, $V_2 = (3,2,3)$, $V_3 = (-1,-1,2)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base et en déterminer la base duale.

Puisque $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, $\mathcal{B} = \{ V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et en notant $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0 = \{e^*_1, e^*_2, e^*_3\}$ à $\mathcal{B}^*_0 = \{V^*_1, V^*_2, V^*_3\}$ est ${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ -9 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On conclut que V^*_1, V^*_2, V^*_3 sont les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} V^*_1(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 9x_2 - x_3 \\ V^*_2(x_1, x_2, x_3) = -6x_1 + 8x_2 + x_3 \\ V^*_3(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 + 6x_2 + x_3 \end{cases}$$

Proposition-Définition

> Pour toute base $\mathcal{F}$ de E*, il existe une base unique $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} = \mathcal{B}^*$. $\mathcal{B}$ est appelée la base préduale (ou, duale) de $\mathcal{F}$, et on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases duales l'une de l'autre.

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3, et φ_1, φ_2 , φ_3, φ_4, les formes linéaires sur E définies par:

$\forall P \in E$, ($\varphi_1(P) = P(0)$, $\varphi_2(P) = P(1)$, $\varphi_3(P) = P''(0)$, $\varphi_4(P) = P''(1)$).

Vérifier que (φ_1, φ_2 , φ_3, φ_4) est une base de E* et en déterminer la base préduale.

Notons $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

Alors $\operatorname{Mat}_{B_0^*}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible, donc $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E*.

En notant $\mathcal{B}$ la base préduale de $\mathcal{F}$, $\mathcal{Q} = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}^*_0, \mathcal{F})$, $\mathcal{P} = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})$, on a:

$$P = {}^t Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Finalement, la base préduale de (φ_1, φ_2 , φ_3, φ_4) est:

$$\left(1-X,\ X,\ -\frac{1}{6}X+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{3}X^3,\ -\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}X^3\right).$$

Exercices:

1) Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies, pour tout (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$, par:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Montrer que (φ_1, φ_2 , φ_3) est une base de ($\mathbb{R}^3$)* et en déterminer la base préduale.

Réponse : La base préduale de (φ_1, φ_2 , φ_3) est (V_1, V_2 , V_3) où:

$$V_1 = \frac{1}{8}(-3,\ 3,\ 2), \quad V_2 = \frac{1}{8}(1,\ -1,\ 2), \quad V_3 = \frac{1}{4}(5,\ -1,\ -6).$$

2) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, par:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = x + \alpha y + \beta z \\ \varphi_2(x, y, z) = \alpha x + \alpha^2 y + z \\ \varphi_3(x, y, z) = \beta x + y + \alpha^2 z \end{cases}$$

a) Donner la condition necessaire et suffisante pour que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Lorsque $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, en déterminer la base préduale.

<u>Réponse:</u>

a) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -(1-\alpha\beta)^2$; CNS : $1-\alpha\beta \neq 0$

b) La base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est (V_1, V_2, V_3), où

$$V_1 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(1-\alpha^4,\ \alpha^3-\beta,\ -\alpha(1-\alpha\beta)\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(\alpha^3-\beta,\ \beta^2-\alpha^2,\ 1-\alpha\beta\right),$$

$$V_3 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\left(-\alpha,\ 1,\ 0\right).$$

<u>E- Transposition</u>

Dans ce paragraphe, E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

<u>Définition</u>

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle transposée de f, et on note ${}^t f$, l'application de F^* dans E^* définie par:

$$\forall \psi \in F^*,\quad {}^t f(\psi) = \psi \circ f.$$

Pour tout ψ de F^*, $\psi \circ f$ est bien un élément de E^*.

Avec la notation de crochet de dualité $\langle .\,, .\rangle$, on a:

$$\forall x \in E,\ \forall \psi \in F^*,\ \langle f(x), \psi\rangle = \langle x, {}^t f(\psi)\rangle.$$

<u>Proposition</u>

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\quad {}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*).$$

<u>Preuve</u>

Pour tous λ de $\mathbb{K}$, ψ, ψ' de F^*:

$${}^t f(\lambda\psi + \psi') = (\lambda\psi + \psi') \circ f = \lambda\psi \circ f + \psi' \circ f = \lambda\, {}^t f(\psi) + {}^t f(\psi').$$

Proposition

a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F), {}^t(\lambda f_1 + f_2) = \lambda\, {}^t f_1 + {}^t f_2$.

b) $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(E, F)\ {}^t(g \circ f) = {}^t g \circ {}^t f$.

c) ${}^t(\mathrm{Id})_E = \mathrm{Id}_{E^*}$.

d) Si f est un isomorphisme de E sur F, alors ${}^t f$ est un isomorphisme de F* sur E*, et:

$$({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1}).$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) une base de E (resp. F), $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t A$.

Preuve

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_p\}$, $\mathcal{C}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $A = (a_{ij})_{ij}$ .On a , pour tout (i , j) de $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$:

$({}^t f({}^t f_i^*))(e_j) = (f_i^* \circ f)(e_j)$matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et $Q = (q_{ij})_{ij}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$.

$$\left({}^t f(f_i^*)\right)(e_j) = \left(f_i^* \circ f\right)(e_j) = f_i^*\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij} \quad \text{et}$$

$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_i^*\right)(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$, donc: $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, ${}^t f(f_i^*) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k^*$, ce qui montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t A$.

Remarques

1) Le résultat précédent justifie la notation ${}^t f$, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

2) Soient deux bases de E: on a

$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}(\mathrm{Id}_{E^*}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}({}^t \mathrm{Id}_E) = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)) = {}^t\mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = {}^t(\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}$

Proposition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'application

$$t : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$$

$$f \mapsto {}^t f$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve

- L'application t est linéaire.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que ${}^t f = 0$. Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F admettent des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On a ${}^t A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f) = 0$, d'où A = ttA = 0, et donc f = 0.
- Et comme t est linéaire injective et que $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{L}(F^*, E^*))$ $(=\dim(E) \times \dim(F))$, on conclut que t est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

F- Bidual

Définition

Le bidual E** de E est le dual de E*, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E*.

Théorème

Si E est de dimension finie, l'application φ de E dans E**, définie en prenant pour $\varphi(x)$ l'application de E* dans $\mathbb{K}$ qui à u associe u(x), est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

φ est appelé l'isomorphisme canonique de E sur E**, il permet d'identifier E** à E.

On a: $\forall\, x \in E,\ \forall\, u \in E^{**},\ \langle \varphi(x), u \rangle = \langle u, x \rangle$.

Exercice1:

Soit $\mathcal{B}_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Vérifier que $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = 2e_1 + e_3$, $f_3 = -e_1 + e_2$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer les composantes des éléments de $\{f^*_1, f^*_2, f^*_3\}$, base duale de $\{f_1, f_2, f_3\}$, dans la base $\{e^*_1, e^*_2, e^*_3\}$ duale de la base canonique.

Exercice2:

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\{e_1,e_2,e_3\}$.

1) Déterminer $\{e_1\}^\perp$, $\{e_2\}^\perp$, $\{e_3\}^\perp$.
2) A partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
   a) Définir l'isomorphisme canonique φ entre $\mathbb{R}^3$ et son dual.
   b) En déduire que tout élément du dual de $\mathbb{R}^3$ peut se définir à l'aide du produit scaleire.
   c) Vérifier que: $\forall (u,x) \in (\mathbb{R}^3)^* \times \mathbb{R}^3$,
   $$\langle u, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \varphi(x), \varphi^{-1}(u)\rangle = 0.$$
   d) Déterminer $\{e_1, e_2\}^\perp$, $\{e_1, e_3\}^\perp$,$\{e_2, e_3\}^\perp$.
3) Quelle relation existe – il entre l'orthogonalité au sens du produit scalaire et l'orthogonalité au sens de la dualité?
4) Si A est une partie de $\mathbb{R}^3$, on note A^0 l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux, au sens du produit scalaire, à tous les éléments de A.
   a) Démontrer que A^0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer $\{e_1\}^o$, $\{e_2\}^o$, $\{e_3\}^o$, $\{e_1, e_2\}^o$, $\{e_1, e_3\}^o$,$\{e_2, e_3\}^o$.

2.Application: Equations d'un sous-espace en dimension finie

Cette partie présente une application très importante de l'étude de l'espace dual: la représentation d'un sous-espace comme intersection d'hyperplans. On se restreint ici au cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace de dimension p (distinct de E); on a donc p < n. Notons $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

Proposition

> Il existe une famille de n − p formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-p}$ telles que :
>
> $$x \in F \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_{n-p}(x) = 0.$$
>
> Réciproquement, un tel système de n−p équations indépendantes définit un sous-espace de dimension p de E.

Remarques

a) (S) : $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \cdots, \varphi_{n-p}(x) = 0$ est appelé un systèeme d'équations de F.

b) Si on exprime les formes linéaires φ_i dans la base duale $\mathcal{B}^*$ c'est-à-dire en fonction des formes linéaires coordonnées dans $\mathcal{B}$, alors (S) prend la forme d'un système linéaire homogène de n − p équations aux n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur quelconque x de E.)

c) Tout sous-espace de dimension p dans un espace vectoriel de dimension n peut être considéré comme l'intersection de n − p =q hyperplans indépendants.

$$F = \bigcap_{i=1}^{q} \ker \phi_i$$

Exemple 1

On suppose que dimE = 5, et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

où x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 sont les coordonnées d'un vecteur x quelconque de E dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ de ce système est de rang 3 comme on peut le voir avec la méthode du pivot.

L'ensemble F des solutions de (S) est donc un sous-espace de dimension 5 − 3 = 2 de E.

Les solutions de ce système peuvent être considérées comme l'intersection des trois hyperplans H_1, H_2 et H_3 d'équations respectives :

$$\begin{cases} (H_1): & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ (H_2): & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ (H_3): & x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

où x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 sont les coordonnées d'un vecteur x quelconque de E dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

H_1, H_2 et H_3 sont les noyaux respectifs des formes linéaires f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\begin{cases} (H_1): & f_1 = e^*_1 - 2\, e^*_2 + 3\, e^*_3 - e^*_4 + e^*_5 \\ (H_2): & f_2 = 2\, e^*_1 - e^*_2 + e^*_3 + e^*_4 - e^*_5 \\ (H_3): & f_3 = e^*_1 + 2\, e^*_2 - 2\, e^*_3 - e^*_4 + 3\, e^*_5 \end{cases}$$

La matrice de f_1, f_2, f_3 dans la base duale $\mathcal{B}_0^*(e)$ est: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = {}^{T}A$.

Cette matrice est de rang 3.

Cela prouve l'indépendance des formes linéaires f_1, f_2 et f_3 . On en déduit que $F = \mathrm{Ker}f_1 \cap \mathrm{Ker}f_2 \cap \mathrm{Ker}f_3$ est de dimension $5 - 3 = 2$.

Pour trouver une base de E, on peut appliquer la méthode du pivot à (S) :

$$(S) \begin{cases} x_1 - 2\, x_2 + 3\, x_3 - x_4 + x_5 = 0 & \\ 2\, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 & E_2 \to E_2 - 2\, E_1 \\ x_1 + 2\, x_2 - 2\, x_3 - x_4 + 3\, x_5 = 0 & E_3 \to E_3 - E_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2\, x_2 + 3\, x_3 - x_4 + x_5 = 0 & E_1 \to 3E_1 + 2\, E_2 \\ 3\, x_2 - 5\, x_3 + 3\, x_4 - 3\, x_5 = 0 & \\ 4\, x_2 - 5\, x_3 + 2\, x_5 = 0 & E_3 \to 3E_3 - 4\, E_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\, x_1 - 3\, x_3 + 3\, x_4 - 3\, x_5 = 0 & E_1 \to 5E_1 + E_3 \\ 3\, x_2 - 5\, x_3 + 3\, x_4 - 3\, x_5 = 0 & E_2 \to E_2 + E_3 \\ 5\, x_3 - 12\, x_4 + 18\, x_5 = 0 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\, x_1 + 3\, x_4 + 3\, x_5 = 0 \\ 3\, x_2 - 9\, x_4 + 15\, x_5 = 0 \\ 5\, x_3 - 12\, x_4 + 18\, x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1/5(x_4 + x_5) \\ x_2 = 3\, x_4 - 5\, x_5 \\ x_3 = 1/5(12\, x_4 - 18\, x_5) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5) = x_4/5\,(-1, 15, 12, 5, 0) - x_5/5\,(1, 25, 18, 0, -5)$.

Puisqu'on peut donner des valeurs arbitraires à x_4 et à x_5, on voit qu'une base de F est formée des deux vecteurs $(-1, 15, 12, 5, 0)$ et $(1, 25, 18, 0, -5)$.

Exemple 2:

Etant donnée une base d'un sous-espace vectoriel F de E, il peut être utile de trouver un système d'équations de F : c'est le probème inverse du précédent.

Supposons par exemple que E soit de dimension 4 et qu'une base de F soit formée des vecteurs

$$u = (1,-1, 2, 1) \text{ et } v = (1, 1, 3,-2).$$

Soit a = (x, y, z, t) un vecteur quelconque de E.

Pour exprimer que a appartient à F il faut ´ecrire que la famille (u, v, a) est de rang 2.

On applique donc la méthode du pivot à la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \\ 1 & -2 & t \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & -2x+z \\ 0 & -3 & -x+t \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -5x-y+2z \\ 0 & 0 & x+3y+2t \end{array}\right)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice précédente soit de rang 2 est que les coordonnées x, y, z, t vérifient le système :

$$\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

On a ainsi obtenu un système d'équations de F.