

EISTI



Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

Algèbre et Géométrie

Exponentielle d'une matrice

Nisrine Fortin-Camdavant

SOMMAIRE

<u>1.Exponentielle d'une matrice:.....</u>	<u>3</u>
<u>2.L'application exponentielle:.....</u>	<u>4</u>
<u>3.Calcul de l'exponentielle d'une matrice.....</u>	<u>4</u>
<u>3.1. Matrice diagonale.....</u>	<u>5</u>
<u>3.2. Matrice nilpotente.....</u>	<u>5</u>
<u>3.3.Matrice quelconque.....</u>	<u>5</u>
<u>4.Applications.....</u>	<u>6</u>
<u>1.Exemple 1: équations différentielles linéaires.....</u>	<u>6</u>

\mathbb{K} désigne un corps commutatif. Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. Exponentielle d'une matrice:

Définition:

Soit A une matrice $n \times n$. L'exponentielle de A , notée e^A ou $\exp(A)$, est la matrice $n \times n$

obtenue de la série $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Cette somme est toujours convergente, par conséquent, l'exponentielle d'une matrice est toujours bien définie.

Remarque

Si A est une matrice 1×1 (c'est-à-dire un scalaire), alors son exponentielle correspond à celle d'un nombre.

Propriétés

Soient A et B deux matrices $n \times n$ sur \mathbb{K} et soient a et b deux nombres complexes.

L'exponentielle d'une matrice possède les propriétés suivantes:

Propriété 1

- i. $e^{0_n} = I_n$.
- ii. $e^{aA} e^{bA} = e^{(a+b)A}$.
- iii. $e^A e^{-A} = I_n$.

Preuve

- i. $e^{0_n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0^k}{k!} = I_n$.
- ii. $e^{(a+b)A} = \sum_{k \geq 0} \frac{(a+b)^k A^k}{k!}$. On sait que $(a+b)^k = \sum_{i=0}^k C_i^k a^i b^{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} a^i b^{k-i} \Rightarrow$

$$e^{(a+b)A} = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} a^i b^{k-i} \right) \frac{A^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} a^i b^{k-i} A^i A^{k-i} \Rightarrow$$

$$e^{(a+b)A} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \frac{(aA)^i (bA)^{k-i}}{i! (k-i)!} = \sum_{i \geq 0} \frac{(aA)^i}{i!} \sum_{k \geq i} \frac{(bA)^{k-i}}{(k-i)!} = e^{aA} e^{bA}.$$
- iii. $e^A e^{-A} = e^{(1-1)A} = e^{0_n} = I_n$.

Propriété 2

- iv. Si A et B commutent, alors $e^A e^B = e^{A+B}$.
- v. Si B est inversible, alors $e^{BAB^{-1}} = B e^A B^{-1}$.

Preuve

iv. $e^{(A+B)} = \sum_{k \geq 0} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_i^k A^i B^{k-i}$ (Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule de binôme de Newton).

$$\text{Donc } e^{(A+B)} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!} \sum_{k \geq i} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = e^A e^B.$$

v. $e^{BAB^{-1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{(BAB^{-1})^k}{k!}$. Or $(BAB^{-1})^k = \underbrace{BAB^{-1}BAB^{-1}\dots BAB^{-1}}_{k \text{ fois}} = BA^k B^{-1}$ donc

$$e^{BAB^{-1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{BA^k B^{-1}}{k!} = B \left(\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \right) B^{-1} = B e^A B^{-1}.$$

2. L'application exponentielle:

L'exponentielle d'une matrice X est toujours inversible. L'inverse de e^X est donné par e^{-X} . Dès lors, cette fonction nous permet de définir une application

$$\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K}),$$

où $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est le groupe linéaire des matrices $n \times n$ inversibles.

Définition:

On appelle logarithme d'une matrice X toute matrice Y telle que $e^Y = X$.
Le logarithme de X n'est pas unique en général.

Propriété 3

Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la bijection: $\text{Exp}_X: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$

$$t \mapsto e^{tX}$$

est de classe C^∞ et passe par l'identité en $t = 0$.

La dérivée de cette application au point t est donnée par $\frac{\partial}{\partial t} e^{tX} = X e^{tX}$.

Remarque: La dérivée de $t \mapsto e^{tX}$ au point $t = 0$ est la matrice X.

3. Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Le calcul d'une exponentielle de matrice, dans certains cas, et notamment ceux d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente, ne présente aucune difficulté. Une fois cette remarque faite, le cas général peut se traiter en se ramenant aux deux cas précédents.

3.1. Matrice diagonale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Alors l'exponentielle de A est obtenue en calculant l'exponentielle de chacun des termes de la diagonale principale:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

Conséquence:

Cette propriété permet de calculer simplement l'exponentielle des matrices diagonalisables.

Si A est diagonalisable alors il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$, avec D est diagonale, alors $e^A = Pe^DP^{-1}$.

3.2. Matrice nilpotente

Une matrice N est nilpotente si $N^q = 0$ pour un entier q . Dans ce cas, l'exponentielle d'une matrice e^N se calcule directement à partir de son développement en série, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes.

$$e^N = I + N + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} + \dots + \frac{N^{q-1}}{(q-1)!}$$

3.3. Matrice quelconque

Pour calculer l'exponentielle d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on se restreint au cas où X est une matrice de polynôme minimal scindé.

Remarque:

Toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire sous forme d'une somme d'une matrice diagonalisable A et une matrice nilpotente N avec $AN = NA$. Donc $X = A + N$.

Cette décomposition permet le calcul de e^X en se ramenant aux cas précédents:

$$e^X = e^{A+N} = e^A e^N.$$

Dans le cas complexe, le polynôme minimal de toute matrice carrée X est scindé, donc on peut faire appel à la réduction de Jordan. Soit J la forme de Jordan de X , et P la matrice de passage. Alors, $X = PJP^{-1}$ et $e^X = P e^J P^{-1}$

Puisque J est la forme de Jordan de X alors J est une somme directe des blocs de Jordan associés à chaque valeur propre de X . Calculer e^J revient à calculer l'exponentielle d'un bloc de Jordan.

Chaque bloc $J_a(\lambda)$ est de la forme $J_a(\lambda) = \lambda I + N$ où N est la matrice nilpotente spéciale. L'exponentielle du bloc $J_a(\lambda)$ est donné par $e^{\lambda I + N} = e^\lambda e^N$.

Exemple:

Soit la matrice: $B = \begin{pmatrix} 21 & 17 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$. $\chi_B(x) = -(x-16)^2(x-4)$ et $m_B(x) = (x-16)^2(x-4)$, B est donc semblable à une forme de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = J_2(16) \oplus J_1(4) \text{ où } J_2(16) = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } J_1(4) = (4).$$

$$J_2(16) = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 16 I_2 + N. \quad N^2 = 0, \text{ donc } N \text{ est nilpotente} \Rightarrow$$

$$e^{J_2(16)} = e^{16} e^N = e^{16} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \right] = \begin{pmatrix} e^{16} & e^{16} \\ 0 & e^{16} \end{pmatrix}.$$

L'exponentielle de la matrice 1×1 est triviale, avec $e^{J_1(4)} = e^4$, d'où $e^J = \begin{pmatrix} e^{16} & e^{16} & 0 \\ 0 & e^{16} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$ et

$$e^B = P \begin{pmatrix} e^{16} & e^{16} & 0 \\ 0 & e^{16} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5e^4 - e^{16} & 5e^4 - 5e^{16} & -2e^{16} \\ -e^4 + e^{16} & -e^4 + 5e^{16} & 2e^{16} \\ 0 & 0 & 4e^{16} \end{pmatrix}.$$

4. Applications

Une des premières applications de l'exponentielle de matrices est la résolution des équations différentielles ordinaires. En effet, de l'équation $\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX}$ (1), on déduit que la solution de

$$\frac{d}{dt} y(t) = A y(t), \quad y(0) = y_0,$$

est donnée par

$$y(t) = e^{At} y_0.$$

4.1. Exemple 1: équations différentielles linéaires

Sachant que $y'(t) = C y(t)$ a pour solution e^{Ct} , considérons le vecteur $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ et la résolution du système différentiel se ramène donc au calcul de e^{Ct} .

On considère le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 3y - z \\ z' = 2x + y + 3z \end{cases}$$

La matrice associée est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

et son exponentielle est

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} 2e^t - 2te^{2t} & -2te^{2t} & 0 \\ -2e^t + 2(t+1)e^{2t} & 2(t+1)e^{2t} & 0 \\ 2te^{2t} & 2te^{2t} & 2e^t \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système est donc $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{Mt} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$. On pose $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$,

donc

$$\begin{cases} x(t) = C_1(2e^t - 2te^{2t}) + C_2(-2te^{2t}) \\ y(t) = C_1(-2e^t + 2(t+1)e^{2t}) + C_2(2(t+1)e^{2t}) \\ z(t) = (C_1 + C_2)(2te^{2t}) + 2C_3te^{2t} \end{cases}$$