

# RAPPELS SUR LES ESPACES VECTORIELS

## ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

### Applications linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une *application linéaire* si

- 1)  $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$
- 2)  $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$f \in L(E, F) \Rightarrow f(0_E) = 0_F$ , d'où  $f(0_E) \neq 0_F \Rightarrow f \notin L(E, F)$

*isomorphisme* = application linéaire bijective / *endomorphisme* = application linéaire de  $E$  dans  $E$  / *automorphisme* = endomorphisme bijectif.

### Sous-espaces vectoriels

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $H$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $H$  est un *sous-espace vectoriel* de  $E$  si

- 1)  $H \neq \emptyset$  (en général  $0_E \in H$ )
- 2)  $\forall x \in H, \forall y \in H, x+y \in H$
- 3)  $\forall x \in H, \forall \alpha \in K, \alpha x \in H$

$H$  s.e.v  $\Rightarrow 0_E \in H$ , d'où  $0_E \notin H \Rightarrow H$  n'est pas un s.e.v

$H$  s.e.v  $\Rightarrow H$  e.v. (avec les lois induites), donc pour montrer e.v., il suffit de montrer s.e.v d'un e.v connu (e.v. des fonctions, e.v. des suites, e.v. des espaces produits, e.v. des matrices, ...)

### Noyau et image

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in L(E, F)$ .

*image* de  $f$  :  $\text{Im} f = \{y \in F, \exists x \in E f(x) = y\} \subset F$ .

*noyau* de  $f$  :  $\text{Ker} f = \{x \in E, f(x) = 0_F\} \subset E$ .

$f$  est injective  $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_E\}$ ,

### Somme de sous-espaces vectoriels

Soient  $H_1$  et  $H_2$  des sous-espaces vectoriels d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ .

Somme directe  $H_1 \oplus H_2$  ssi  $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$ . **En pratique pour montrer  $H_1 \oplus H_2 = E$  :**

- $H_1$  et  $H_2$  supplémentaires ssi
- 1)  $H_1$  et  $H_2$  s.e.v
  - 2)  $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$
  - 3)  $\forall x \in E, x = h_1 + h_2$ , où  $h_1 \in H_1$  et  $h_2 \in H_2$

$H_1 \oplus H_2 = E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists !(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$  tel que  $x = h_1 + h_2$

*idempotent* :  $f \circ f = f$  / *projecteur* : endomorphisme idempotent

$p$  projecteur  $\Rightarrow \text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$  /  $\text{Ker}(\text{Id}_E - p) = \text{Im } p$  /  $\text{Im}(\text{Id}_E - p) = \text{Ker } p$  **Ne pas apprendre mais savoir le démontrer**

$p \in L(E)$  :  $\text{Id}_E - p$  projecteur  $\Leftrightarrow p$  projecteur

## ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une suite finie de  $n$  vecteurs de  $E$ .

### famille génératrice

Tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des  $e_i, i=1, \dots, n$ , :  $\forall x \in E, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n, x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ .

La famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $\text{Im}f$ .

famille libre (linéairement indépendants)

Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$  alors  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

famille liée : famille non libre (un des vecteurs combinaison linéaire des autres)

rang : nombre de vecteurs linéairement indépendants

base et dimension

base = famille génératrice et libre :  $\forall x \in E, \exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n, x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ .

Dimension de  $E$  = nombre de vecteurs dans la base

Bases canoniques de références :  $\mathbb{R}^3 : \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$  /  $\mathbb{R}_3[X] :$

$\{1, X, X^2, X^3\}$  /  $M_2(\mathbb{R}) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

- Base  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{libre} \\ n = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{génératrice} \\ n = \dim E \end{cases}$
- $H_1 \oplus H_2 = E \Leftrightarrow \begin{cases} H_1 \cap H_2 = \{0_E\} \\ \dim H_1 + \dim H_2 = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_1 + H_2 = E \\ \dim H_1 + \dim H_2 = \dim E \end{cases}$
- Théorème du rang :  $f \in L(E, F) \Rightarrow \dim E = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f)$