

EISTI



Ecole  
Internationale  
des Sciences  
du Traitement  
de l'Information

**TD 2**  
20/11/2007  
Nisrine Fortin-Camdavant  
*Algèbre*

Exercice 1:

Trigonaliser les matrices réelles suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

Soient les matrices à coefficients réels suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trigonaliser les matrices A et C.
2. Déterminer le polynôme minimal de A et B.

Exercice 3:

Soit  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique B est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker } (f - 2 \text{ Id})$ .
2. Trouver une base  $B'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4:

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour matrice A dans la base canonique B de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base  $B'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Soit  $g \in L(\mathbb{R}^3)$  un endomorphisme tel que  $fog = gof$ .  
Montrer que  $\text{Ker}(f-2 \text{ Id})$  et  $\text{Ker}(f-\text{Id})^2$  sont laissés stables par  $g$ .

4. En déduire que la matrice de  $g$  dans  $B'$  est de la forme  $Mat(g, B') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$  avec

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exercice 5:

On se donne  $f$  un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont notés respectivement par  $\chi_f$  et  $m_f$  et vérifiant:

$$\begin{cases} m_f = (x-1)^3 x^3 \\ x^5 \text{ divise } \chi_f \\ \dim E = 8 \end{cases}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $f$ .
2. Donner la ou les réduites de Jordan de  $f$ .

Exercice 6:

Soit  $A$  une matrice carrée donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner le polynôme caractéristique, minimal de  $A$ .
2. Réduire sous forme de Jordan.

Exercice 7:

Soit  $A$  une matrice réelle d'ordre 3 vérifiant  $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0_3$ . Montrer que la matrice est diagonalisable.

Exercice 8:

Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 9:

Déterminer toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour les matrices dont le polynôme caractéristique  $P(t)$  et le polynôme minimal  $m(t)$  sont les suivants :

- i.  $P(t) = (t-2)^4(t-3)^2$ ;  $m(t) = (t-2)^2(t-3)^2$
- ii.  $P(t) = (t-7)^5$ ;  $m(t) = (t-7)^2$
- iii.  $P(t) = (t-3)^4(t-5)^4$ ;  $m(t) = (t-3)^2(t-5)^2$
- iv.  $P(t) = (t-2)^7$ ;  $m(t) = (t-2)^3$