karam.fayad@eisti.eu

Corrigé - Exercices supplémentaires - Applications linéaires

Exercice 1 . classique, sans difficulté particulière

Exercice 2 . classique, sans difficulté particulière

Exercice 3 . classique, sans difficulté particulière

Exercice 4 .
On suppose que $f^3 = f$, où f^3 désigne $f \circ f \circ f$. Montrons que $E = \mathrm{Im}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel $x = f^2(a)$.
Ainsi $0 = f(x) = f(f^2(a)) = f^3(a) = f(a)$, donc $f(a) = 0$ puis $x = f(f(a)) = f(0) = 0$.
On déduit que :

$$\mathrm{Im}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

Soit $x \in E$, on écrit $x = f^2(x) + (x - f^2(x))$.
On a bien $f^2(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$ et $f(x - f^2(x)) = f(x) - f^3(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi $x - f^2(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
D'où $x \in \mathrm{Im}(f^2) + \mathrm{Ker}(f)$.
On en déduit que :

$$E = \mathrm{Im}(f^2) + \mathrm{Ker}(f).$$

Exercice 5 .
On suppose que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$. On doit montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}.$$

Comme E est de dimension finie, le théorème du rang appliqué à f donne :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)). \tag{1}$$

Le théorème du rang appliqué à g donne :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(g) + \dim(\mathrm{Ker}(g)). \tag{2}$$

L'égalité $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ donne :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)). \tag{3}$$

L'égalité $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$ donne :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)). \tag{4}$$

En sommant les égalités (3) et (4), et en utilisant les égalités (1) et (2)

$$2\dim(E) = \underbrace{\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))}_{\dim(E)} + \underbrace{\mathrm{rg}(g) + \dim(\mathrm{Ker}(g))}_{\dim(E)} - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)).$$

On déduit alors que

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) + \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = 0.$$

La dimension étant un entier naturel, il s'ensuit que

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = 0.$$

De façon équivalente :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}.$$

Exercice 6 .

1. Si p est un projecteur de E, alors $p \circ p = p$, d'où, par distributivité
$$(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p = \mathrm{Id}_E - p - p + p = \mathrm{Id}_E - p$$
ainsi $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E.
Réciproquement, si $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E, alors $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p$ ce qui donne $\mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p = \mathrm{Id}_E - p$ d'où $-p + p \circ p = 0$, ainsi $p \circ p = p$ donc p est un projecteur de E.

2. (a) Soit $x \in E$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(p)$, alors $p(x) = 0$, alors $x = x - 0 = x - p(x) = (\mathrm{Id}_E - p)(x)$ ainsi $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$.
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = (\mathrm{Id}_E - p)(a) = a - p(a)$, d'où $p(x) = p(a) - (p \circ p)(a) = p(a) - p(a) = 0$, ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p)$. On en déduit que
$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p).$$
En appliquant cette propriété au projecteur $p' = \mathrm{Id}_E - p$, on trouve $\mathrm{Ker}(p') = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p')$, ce qui donne
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}(p).$$
(b) Il faut montrer que pour tout $x \in \mathrm{Im}(p)$, $p(x) = x$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$, ainsi $p(x) = (p \circ p)(a) = p(a) = x$.
On déduit que
$$p|_{\mathrm{Im}(p)} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(p)}.$$
(c) Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$, alors $p(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$, d'où $(p \circ p)(a) = 0$ or $p \circ p = p$, ainsi $p(a) = 0$, donc $x = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.
Montrons maintenant que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = E$.
Soit $x \in E$, on écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$:
on a : $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. On en déduit que
$$\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = E.$$
Dans la suite de l'exercice, lorsque p est un projecteur de E, comme on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, pour tout $x \in E$, on écrira $x = x_K + x_I$ où $(x_K, x_I) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$.
De plus, comme $x_I \in \mathrm{Im}(p)$, on déduit d'après la question précédente que $p(x_I) = x_I$.

3. On suppose que $E = F \oplus G$.
(a) Soit $x \in E$. Montrons que $(p \circ p)(x) = p(x)$.
On écrit $x = y + z$ avec (y, z) unique dans $F \times G$. On a alors $p(x) = y$.
La décomposition de y sur la somme $E = F \oplus G$ est $y = y + 0$, d'où $p(y) = y$.
On en déduit que $(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(y) = y = p(x)$.
(b) Montrons que $\mathrm{Ker}(p) = G$.
Soit $x \in G$, la décomposition de x sur la somme $E = F \oplus G$ est $x = 0 + x$, ainsi $p(x) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(p)$.
Réciproquement, si $p(x) = 0$, alors la décomposition de x sur la somme $E = F \oplus G$ est $x = 0 + z$ avec $z \in G$. D'où $x = z \in G$.

Montrons que $\mathrm{Im}(p) = F$.
Par définition de p, on a $\mathrm{Im}(p) \subset F$.
Réciproquement, soit $x \in F$, alors la décomposition de x sur la somme $E = F \oplus G$ est $x = x + 0$, d'où $p(x) = x$ ainsi $x \in \mathrm{Im}(p)$.

4. On suppose ici que $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$ et que $f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p)$. Montrons que $f \circ p = p \circ f$.
Soit $x \in E$. On a :
$$(f \circ p)(x) = f(p(x_K + x_I)) = f(p(x_K) + p(x_I)) = f(p(x_I)) = f(x_I).$$

D'autre part,

$$(p \circ f)(x) = p(f(x_K + x_I)) = p(f(x_K) + f(x_I)) = p(f(x_K)) + p(f(x_I))$$

or $f(x_K) \in f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p)$, d'où $p(f(x_K)) = 0$ et $f(x_I) \in f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$, d'où $p(f(x_I)) = f(x_I)$. Ainsi $(p \circ f)(x) = f(x_I)$. On en déduit que

$$(f \circ p)(x) = (p \circ f)(x) = f(x_I).$$

5. On suppose que p et q sont deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

   (a) On a, par associativité de $\circ$ et grâce au fait que p et q commutent :

   $$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q.$$

   Ainsi, $p \circ q$ est un projecteur de E.

   (b) Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = p(q(a))$. Ainsi $x \in \mathrm{Im}(p)$.
   Mais comme $p \circ q = q \circ p$, alors $x = q(p(a)) \in \mathrm{Im}(q)$, donc $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
   Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, alors il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $x = p(a) = q(b)$.
   On a alors $p(x) = p(q(b)) = p(p(a)) = p(a) = x$, ainsi $x = p(q(b)) \in \mathrm{Im}(p \circ q)$.
   On en déduit que

   $$\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$

   (c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$, alors il existe $(a, b) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Ker}(q)$ tel que $x = a + b$.
   On a donc $p(q(x)) = p(q(a+b)) = p(q(a)+q(b)) = p(q(a)) = q(p(a)) = q(0) = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$.
   Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$, alors $p(q(x)) = 0 = q(p(x))$. On écrit $x = x_I + x_K$ avec $(x_I, x_K) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$, et on sait que $p(x_I) = x_I$ et $p(x_K) = 0$. On a alors :
   $0 = q(p(x)) = q(p(x_I) + p(x_K)) = q(x_I)$, ainsi $x_I \in \mathrm{Ker}(q)$ puis $x = x_I + x_K \in \mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Ker}(p)$.
   On en déduit que

   $$\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q).$$

6. Soit p et q deux projecteurs de E.

   (a) i)$\Rightarrow$ ii)
   On suppose que $p + q$ est un projecteur de E, ainsi $(p + q) \circ (p + q) = p + q$ d'où :
   $p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q$, ainsi $p + p \circ q + q \circ p + q = p + q$ et on en déduit donc que $p \circ q + q \circ p = 0$, d'où

   $$p \circ q = -q \circ p.$$

   En composant par p à gauche : $p \circ p \circ q = -p \circ q \circ p$, d'où $p \circ q = -p \circ q \circ p$.
   En composant par p à droite : $p \circ q \circ p = -q \circ p \circ p$, d'où $p \circ q \circ p = -q \circ p$, ainsi $q \circ p = -p \circ q \circ p$.
   On en déduit que

   $$p \circ q = q \circ p.$$

   Les deux égalités $p \circ q = -q \circ p$ et $p \circ q = q \circ p$ entraînent que

   $$p \circ q = q \circ p = 0.$$

   ii)$\Rightarrow$ i)
   Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$, alors :
   $(p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q$
   ainsi $p + q$ est un projecteur de E.

   On en déduit que i)$\Leftrightarrow$ ii).
   L'équivalence ii)$\Leftrightarrow$ iii) est immédiate car $p \circ q = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $q \circ p = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

   (b) On suppose que $p + q$ est un projecteur de E.

i. Soit $x \in \mathrm{Im}(p+q)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = (p+q)(a) = p(a) + q(a) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, alors il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $x = p(a) + q(b)$.
Comme $p \circ q = q \circ p = 0$, on a : $p(x) = p(p(a)) = p(a)$ et $q(x) = q(q(b)) = q(b)$ d'où :
$x = p(a) + q(b) = p(x) + q(x) = (p+q)(x) \in \mathrm{Im}(p+q)$.
On en déduit que
$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$
De plus, soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, alors il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $x = p(a) = q(b)$, d'où :
$x = p(a) = p(p(a)) = p(q(b)) = 0$. Ainsi
$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}.$$
On déduit que
$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q).$$

ii. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, alors $p(x) = q(x) = 0$, donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, alors $(p+q)(x) = 0$, alors
$$p(x) = -q(x) \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}.$$
D'où $p(x) = q(x) = 0$, ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
On en déduit que
$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$