karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS2 Algèbre (17/11/2017)

Exercice 1 .

— Réflexivité évidente : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = xf(x)$, donc $x\mathscr{R}x$.

— Symétrie évidente : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathscr{R}y \;\Leftrightarrow\; xf(y) = yf(x) \;\Leftrightarrow\; yf(x) = xf(y) \;\Leftrightarrow\; y\mathscr{R}x$.

— Transitivité : soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Supposons que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ et montrons que $x\mathscr{R}z$.
$x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ alors $xf(y) = yf(x)$ et $yf(z) = zf(y)$ alors $xzf(y) = xyf(z)$ d'une part, et $xzf(y) = yzf(x)$, d'où $xyf(z) = yzf(x)$.
Cas 1 : $y \neq 0$, d'où $xf(z) = zf(x)$, donc $x\mathscr{R}z$
Cas 2 : $y = 0$, d'où $xf(y) = 0$ et $zf(y) = 0$ d'où $x = z = 0$, car f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Ainsi $x\mathscr{R}z$.

Deuxième méthode pour montrer que $x\mathscr{R}z$:
$xf(z) = xf(y)\dfrac{f(z)}{f(y)} = yf(x)\dfrac{f(z)}{f(y)} = yf(z)\dfrac{f(x)}{f(y)} = zf(y)\dfrac{f(x)}{f(y)} = zf(x)$, doù $x\mathscr{R}z$.

Exercice 2 .

1. f n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$.
f n'est pas surjective car $f(\mathbb{R}) = [2, +\infty[\, \neq \mathbb{R}$. (ou aussi 0 n'a pas d'antécédent par f : l'équation $x^2+2 = 0$ n'a pas de solution réelle).
2. On peut montrer (par analyse-synthèse) que $\forall\, y \geq 2$, $\exists!\, x \leq 0$, $y = x^2 + 2$. En effet :
$$y = x^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 = y - 2 \;\Leftrightarrow\; x = -\sqrt{y-2}.$$
f est donc bijective, de bijection réciproque $f^{-1} : [2, +\infty[\; \longrightarrow\;]-\infty, 0]$ donnée par $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}$.

Exercice 3 .

1. Si $a = b$, alors $\varphi_a = \varphi_b$, rien à montrer. Réciproquement, supposons que $\varphi_a = \varphi_b$, alors $\varphi_a(x) = \varphi_b(x)$ pour un (ou tout) élément x de E, d'où $a = b$.
2. (a) Supposons que f est injective, et montrons la proposition (B) :
Soit X un ensemble, φ et ψ deux applications de X dans E. Supposons que $f \circ \varphi = f \circ \psi$ et montrons que $\varphi = \psi$.
Soit $x \in X$, on a alors $(f \circ \varphi)(x) = (f \circ \psi)(x)$, d'où $f(\varphi(x)) = f(\psi(x))$, donc $\varphi(x) = \psi(x)$ par injectivité de f. Ainsi, $\forall\, x \in X$, $\varphi(x) = \psi(x)$, donc les applications φ et ψ sont égales.

   (b) Supposons la proposition (B) vraie et montrons que f est injective.
Soit $a, b \in E$. Supposons que $f(a) = f(b)$ et montrons que $a = b$.
Considérons φ_a et φ_b les applications constantes de E dans E de valeur a et b, respectivement. On a alors : $\forall\, x \in E$, $\underbrace{f(\varphi_a(x))}_{f(a)} = \underbrace{f(\varphi_b(x))}_{f(b)}$, donc $f \circ \varphi_a = f \circ \varphi_b$, d'où, par (B), $\varphi_a = \varphi_b$, donc $a = b$.

Exercice 4 . On peut montrer (par analyse-synthèse) que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$, $m = \varphi(n)$. En effet,

— si m est pair : $\varphi(n) = m \Leftrightarrow 2n = m \;\Leftrightarrow\; n = \dfrac{m}{2}$.

— Si m est impair : $\varphi(n) = m \;\Leftrightarrow\; -2n - 1 = m \;\Leftrightarrow\; n = -\dfrac{m+1}{2}$.

Ainsi, φ est bijective, de bijection réciproque
$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & \varphi^{-1}(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5 .

1. On distingue les 6 cas possibles, $a \equiv 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 modulo 6.
   À l'aide d'un tableau de congruence modulo 6 :

a	0	1	2	3	4	5
a^2	0	1	4	3	4	1
$a^2 - 1$	5	0	3	2	3	0
$a(a^2 - 1)$	0	0	0	0	0	0

   Dans les 6 cas, $a(a^2 - 1) \equiv 0$ modulo 6.

2. **Première méthode** : à l'aide d'un tableau de congruence modulo 6, pour $n > 0$ (si $n = 0$, il n'y a rien à montrer car 6 divise 0).

a	0	1	2	3	4	5
a^2	0	1	4	3	4	1
a^{2n}	0	1	$4^n \equiv 4$	$3^n \equiv 3$	$4^n \equiv 4$	1
$a^{2n} - 1$	5	0	3	2	3	0
$a(a^{2n} - 1)$	0	0	0	0	0	0

   Dans les 6 cas, $a(a^{2n} - 1) \equiv 0$ modulo 6.
   On a utilisé le fait que $\forall\ n > 0$, $4^n \equiv 4$ modulo 6 et $3^n \equiv 3$ modulo 6, ce qui est automatique à l'aide d'une simple récurrence.

   Deuxième méthode : montrons par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, 6 divise $a(a^{2n} - 1)$.
   Initialisation : pour $n = 0$, la propriété est vraie car 6 divise 0.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que 6 divise $a(a^{2n} - 1)$ et montrons que 6 divise $a(a^{2(n+1)} - 1)$.
   Comme 6 divise $a(a^{2n} - 1)$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$, $a^{2n+1} = 6q + a$, d'où :

   $a(a^{2n+2} - 1) = a^{2n+3} - a = a^2 a^{2n+1} - a = a^2(6q + a) - a = 6qa^2 + a(a^2 - 1)$ qui est bien divisible par 6 car 6 divise $6qa^2$ et 6 divise $a(a^2 - 1)$ d'après la question (1).

   Conclusion : pour tout entier naturel n, 6 divise $a(a^{2n} - 1)$.