karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS4 Algèbre (09/03/2018)

Exercice 1 .
La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit :

$$F(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+4)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+4}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en -1, on obtient $b = -\frac{1}{5}$.
En multipliant par X^2+4 et en évaluant en $2i$, on obtient $c = -\frac{3}{25}$ et $d = \frac{8}{25}$.
En évaluant en 0, on obtient : $a + b + \frac{d}{4} = 0$ d'où $a = \frac{3}{25}$.
Ainsi, dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\boxed{F(X) = \frac{3}{25(X+1)} - \frac{1}{5(X+1)^2} + \frac{-3X+8}{25(X^2+4)}}$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit :

$$F(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X-2i)(X+2i)} = \frac{3}{25(X+1)} - \frac{1}{5(X+1)^2} + \frac{\alpha}{X-2i} + \frac{\overline{\alpha}}{X+2i}.$$

En multipliant par $X-2i$ et en évaluant en $2i$, on obtient $\alpha = -\frac{3+4i}{50}$.
Ainsi, dans $\mathbb{C}(X)$,

$$\boxed{F(X) = \frac{3}{25(X+1)} - \frac{1}{5(X+1)^2} - \frac{3+4i}{50(X-2i)} - \frac{3-4i}{50(X+2i)}}$$

Exercice 2 .

1. • Associativité :
soit $(m,n), (m'n'), (m'',n'') \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned}((m,n) \star (m',n')) \star (m'',n'') &= (m + (-1)^n m', n+n') \star (m'',n'') \\ &= \Big(m + (-1)^n m' + (-1)^{n+n'} m'', n+n'+n''\Big)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(m,n) \star ((m',n') \star (m'',n'')) &= (m,n) \star (m' + (-1)^{n'} m'', n'+n'') \\ &= \Big(m + (-1)^n \times (m' + (-1)^{n'} m''), n+n'+n''\Big) \\ &= \Big(m + (-1)^n m' + (-1)^{n+n'} m'', n+n'+n''\Big)\end{aligned}$$

D'où : $((m,n) \star (m',n')) \star (m'',n'') = (m,n) \star ((m',n') \star (m'',n''))$

• Élément neutre :
$(0,0)$ est l'élément neutre car pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $(m,n) \star (0,0) = (0,0) \star (m,n) = (m,n)$.

• Inversibilité :
Montrons, par analyse-synthèse, que tout élément (m,n) est inversible pour la loi $\star$.
Soit (m',n') l'inverse de (m,n), on a alors $(m,n) \star (m',n') = (0,0)$, d'où $m + (-1)^n m' = 0$ et $n + n' = 0$,

d'où $m' = (-1)^{n+1}m$ et $n' = -n$.
Réciproquement, on a : $(m,n) \star ((-1)^{n+1}m, -n) = ((-1)^{n+1}m, -n) \star (m,n) = (0,0)$.
On en déduit que (m,n) est inversible, d'inverse $((-1)^{n+1}m, -n)$ qu'on choisit de noter $(m,n)^{-1}$.
Conclusion : $(\mathbb{Z}^2, \star)$ est un groupe.

2. Ce groupe n'est pas abélien car $(0,1) \star (1,1) \neq (1,1) \star (0,1)$.
   En effet : $(0,1) \star (1,1) = (-1,2)$ et $(1,1) \star (0,1) = (1,2)$.

3. H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, \star)$ car :
   — $(0,0) \in H$
   — pour tous $(a,0),(a',0) \in H$, $(a,0) \star (a',0)^{-1} = (a,0) \star (-a',0) = (a-a',0) \in H$.

   K est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, \star)$ car :
   — $(0,0) \in K$
   — pour tous $(0,b),(0,b') \in K$, $(0,b) \star (0,b')^{-1} = (0,b) \star (0,-b') = (0,b-b') \in K$.

Exercice 3 .

1. Montrons que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$:
   — $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$:
   - $0 = 0 + i0 \in \mathbb{Z}[i]$
   - pour tous $a+ib, c+id \in \mathbb{Z}[i]$, $(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d) \in \mathbb{Z}[i]$.

   — $\mathbb{Z}[i]$ est stable par la multiplication :
   pour tous $a+ib, c+id \in \mathbb{Z}[i]$, $(a+ib) \times (c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) \in \mathbb{Z}[i]$.
   — $1 = 1 + i0 \in \mathbb{Z}[i]$.

2. (a) Soit $z = a+ib$, $z' = c+id \in \mathbb{Z}[i]$, on a $N(zz') = N(z)N(z')$ car
   $N(zz') = N((ac-bd)+i(ad+bc)) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$
   $N(z)N(z') = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

   Deuxième méthode : On remarque que pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = |z|^2$, d'où :
   $N(zz') = |zz'|^2 = (|z| \cdot |z'|)^2 = |z|^2|z'|^2 = N(z)N(z')$.

   (b) Si z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, alors il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$, d'où $N(zz') = N(1) = 1$, d'où $N(z)N(z') = 1$ or $N(z), N(z') \in \mathbb{N}$, ainsi $N(z) = N(z') = 1$.
   Réciproquement, si $N(z) = 1$ avec $z = a+ib$, alors $a^2 + b^2 = 1$ or $a,b \in \mathbb{Z}$ d'où $(a,b) = (1,0)$ ou $(a,b) = (-1,0)$ ou $(a,b) = (0,1)$ ou $(a,b) = (0,-1)$. Ainsi $z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = i$ ou $z = -i$.
   Dans les 4 cas, z est inversible : l'inverse de 1 est 1, celui de -1 est -1, celui de i est $-i$ et celui de $-i$ est i.

   (c) D'après la question précédente, on déduit que les seuls éléments inversibles dans $\mathbb{Z}[i]$ sont $1, -1, i, -i$.

Exercice 4 .

1. La loi $\star$ est clairement commutative. Elle n'est pas associative car $(0 \star 1) \star 2 = 0 \star 2 = 1$ alors que $0 \star (1 \star 2) = 0 \star 1 = 0$, ainsi $(0 \star 1) \star 2 \neq 0 \star (1 \star 2)$.

2. Supposons que le magma $(\mathbb{N}, \star)$ possède un élément neutre pair e, on a alors $e \star 0 = 0 = \dfrac{e+0}{2} = \dfrac{e}{2}$, ainsi $e = 0$.
   On a $0 \star 1 = 0$ d'après la loi $\star$, et d'autre part $0 \star 1 = 1$ car 0 est l'élément neutre. Absurde.
   Ainsi, il n'y a pas d'élément neutre pair.
   Supposons que le magma $(\mathbb{N}, \star)$ possède un élément neutre impair e, on a alors $e \star 0 = 0 = \dfrac{e-1}{2}$, ainsi $e = 1$.
   On a $1 \star 2 = 1$ d'après la loi $\star$, et d'autre part $1 \star 2 = 2$ car 1 est l'élément neutre. Absurde.
   Ainsi, il n'y a pas d'élément neutre impair.
   Conclusion : Le magma $(\mathbb{N}, \star)$ ne possède pas d'élément neutre.

Exercice 5 . D'abord, $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ est clairement un groupe abélien : la loi $\oplus$ n'est autre que la multiplication des réels, elle fait de $\mathbb{R}_+^*$ un groupe abélien (l'élément neutre étant 1, l'inverse de x est $\frac{1}{x}$).
Vérifions maintenant les quatre axiomes de la loi $\odot$: soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

— $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$ car :
$\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = x^\lambda \oplus y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$.

— $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$ car :
$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda \oplus x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$

— $\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda\mu) \odot x$ car :
$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot x$

— $1 \odot x = x$ car :
$1 \odot x = x^1 = x$